

5/02/2018

PARTE A

1. [7 pt] Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare l'insieme di convergenza semplice della serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)(x-2)^n$.

2. [7 pt] Determinare massimo e minimo assoluti di $f(x, y) = \frac{1}{x+y-1} + \arctan(x+y)$ nel compatto $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \leq 0, y \geq -1, x \geq 0\}$.

3. [6 pt] Sia dato il campo $F(x, y, z) = \left(\frac{z}{x+y} + x, \frac{z}{x+y}, \log(x+y)\right)$. Calcolare

(a) il lavoro di F lungo la curva $\gamma(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t), \pi), t \in [0, \pi/2]$;

(b) il potenziale U tale che $U(0, 1, 1) = -2$

4. [7 pt] Sia $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 10, x \leq 0\}$. Calcolare, riportando i passaggi,

$$\iint_D xy^2 dx dy =$$

5. [7 pt] Si consideri la regione

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \leq z \leq 9, x^2 + y^2 \leq z\}.$$

Calcolare, riportando i passaggi salienti, il flusso del campo \mathbf{F} uscente da ∂K , dove \mathbf{F} è

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + yz^2, x + y + z, x + z^2).$$

PARTE B

6. [8 pt] Siano $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq (x + \pi)(2\pi - x)\}$, $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \sin(x)\}$.
Barrare le 4 risposte giuste:

L'insieme U è: A aperto B chiuso C limitato D convesso

L'insieme V è: A aperto B chiuso C limitato D convesso

L'insieme $U \cap V$ è: A aperto B chiuso C limitato D convesso

(Nota: le risposte sbagliate non tolgono punti; non è consentito barrare più di 4 risposte.)

7. [5 pt] Enunciare il teorema di Green.

8. [5 pt] Siano date $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Calcolare

$$\frac{\partial}{\partial z} \{f(x, g(x, z), z)\} =$$

9. [9 pt] Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x + y)^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

studiarne

(a) la continuità,

(b) la derivabilità,

(c) la differenziabilità.

10. [7 pt] Impostare (ma non calcolare) un integrale triplo per il calcolo del volume dell'insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 - y^2 \leq 0, 1 \leq y \leq 2\}.$$