

Esercizi gennaio 2010

Esercizio 1

Sia M una varietà differenziabile di dimensione $m > 0$ e sia $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ una sommersione. Dimostrare che M non è compatta.

Esercizio 2

Sia $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione C^∞ , supponiamo che 0 sia un valore regolare per g e sia $M \neq \emptyset$, $M := g^{-1}(0)$. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ C^∞ e sia $h := f|_M$. Mostrare che $\{\text{punti critici di } h\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0 \text{ e } \text{rango}(A_x) < m + k\}$ dove $A_x = \begin{pmatrix} (Jf)_x \\ (Jg)_x \end{pmatrix}$.

Esercizio 3

Sia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2$ e sia $h = f|_{S^3}$.

- (1) Trovare i punti critici e i valori critici di h .
- (2) Sia $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi(x, y, z, w) = (x^2 + y^2, w)$, trovare i punti critici di $\phi|_{S^3}$.
- (3) Mostrare che $M := h^{-1}(1/2)$ è una varietà differenziabile di dimensione 2.
- (4) Determinare $T_p(M)$ per $p = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

Esercizio 4

Sia $f : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) - \{x_0 = 0\} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, $f(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (\frac{x_0^2 + 2x_2x_3}{x_0^2 + x_1^2} : \frac{x_3}{x_0})$.

- (1) Verificare che f è ben definita.
- (2) Dire se f ha punti critici.

Esercizio 5

Sia $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 1\}$, sia $\omega \in \Lambda^2(M)$, $\omega = \frac{y}{x-1} dx \wedge dz + \frac{z}{x-1} dx \wedge dy$.

- (1) ω è chiusa?
- (2) ω è esatta?
- (3) Sia $X = \{\frac{(x-5)^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} = \frac{1}{7}\}$. Dimostrare che X è una sottovarietà di M .
- (4) Calcolare $\int_X \omega$.

Esercizio 6

Sia $\omega = (\frac{-y}{x^2+y^2} + 2xy)dx + (\frac{x}{x^2+y^2} + x^2)dy \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$.

- (1) ω è chiusa?
- (2) ω è esatta?
- (3) Sia $X = \{(x-1)^2 + (y+5)^2 = \frac{1}{4}\}$. Dimostrare che X è una sottovarietà di $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
- (4) Calcolare $\int_X \omega$.

Esercizio 7

Sia $\omega = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$.

- (1) $\omega|_{S^2}$ è chiusa?
- (2) Calcolare $\int_{S^2} \omega$.
- (3) $\omega|_{S^2}$ è esatta?

Esercizio 8

Sia M una varietà differenziabile compatta, connessa, orientabile di dimensione n . Mostrare che l'applicazione

$$\begin{aligned} H_{dR}^n(M) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ [\omega] &\mapsto \int_M \omega \end{aligned}$$

è suriettiva.

Esercizio 9

Sia M una varietà differenziabile di dimensione $2n$. Supponiamo che M abbia una forma simplettica ω , cioè $\omega \in \Lambda^2(M)$, tale che ω^n sia mai nulla e $d\omega = 0$. Mostrare che se M è compatta, $\dim(H_{dR}^{2k}(M)) \neq 0 \forall k$.