Esercizi giugno 2013

Esercizio 1

Sia (M,g) una varietà Riemanniana sia $\gamma : (a,b) \to M$ una curva $\mathcal{C}^\infty$ regolare. Dimostrare che esiste una funzione $\lambda : (a,b) \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$ tale che

$$\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = \lambda(t)\gamma'(t)$$

per ogni t se e solo se la riparametrizzazione di γ per lunghezza d'arco è una geodetica.

Esercizio 2

Sia $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ con la metrica di Poincaré data da

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2},\ g_{12} = g_{21} = 0.$$

(1) Dimostrare che se identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ tramite l'isomorfismo $(x,y) \mapsto x + iy$, il gruppo delle trasformazioni di M dato da

$$G := \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\}$$

agisce transitivamente su M (cioè per ogni $z,w \in M$ esiste $\phi \in G$ tale che $\phi(z) = w$).

(2) Determinare lo stabilizzatore di $(0,1)$, cioè l'insieme

$$H := \{\phi \in G \mid \phi(i) = i\} \subset G.$$

(3) Mostrare che per ogni $v,w \in T_{(0,1)}M$ tali che $||v|| = ||w|| = 1$, esiste $\phi \in H$ tale che $D\phi_{(0,1)}(v) = w$.

(4) Mostrare che (M,g) è geodeticamente completa.

Esercizio 3

Sia $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ con la metrica data da

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{2y},\ g_{12} = g_{21} = 0.$$

(1) Mostrare che l'immagine della curva $\gamma : [a,b] \to M$, $\gamma(t) = (0,t)$, con $a,b > 0$ è una geodetica (cioè la sua riparametrizzazione per lunghezza d'arco è una geodetica).

(2) Calcolare il limite per $a \to 0$ della la lunghezza di γ sul segmento $[a,1]$.

(3) Mostrare che (M,g) non è geodeticamente completa.

Esercizio 4

Siano

$$M \xrightarrow{f} L \xleftarrow{g} N$$

mappe lisce tra varietà. Supponiamo che siano entrambe sommersioni. Dimostrare che esiste una varietà liscia $M \times_L N$, insieme con due mappe lisce

$$M \xleftarrow{p_M} M \times_L N \xrightarrow{p_N} N$$

tali che $g \circ p_N = f \circ p_M$ e tali che vale la proprietà universale del pullback: per ogni varietà M' e per ogni coppia di mappe lisce

$$M \xleftarrow{p} M' \xrightarrow{q} N$$

tali che $g \circ q = f \circ p$, esiste un'unica mappa liscia

$$F : M' \longrightarrow M \times_L N$$

con $p_M \circ F = p$ e $p_N \circ F = q$.

Esercizio 5

Siano n, m interi, con $1 \leq n \leq m$. Determinare i punti critici della mappa $f : S^n \times S^m \to \mathbb{R}$, definita dalla formula

$$f((x_0, \ldots, x_n), (y_0, \ldots, y_m)) = x_0 + y_0.$$

Esercizio 6

Data una varietà M di dimensione m la cui coomologia di De Rham $H^\bullet(M)$ ha dimensione finita, definiamo *caratteristica di Eulero-Poincaré* di M il numero intero

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \dim H^i(M).$$

Siano ora $U, V \subset M$ sottovarietà aperte, con $M = U \cup V$. Supponiamo che $H^\bullet(M), H^\bullet(U), H^\bullet(V), H^\bullet(U \cap V)$ abbiano dimensione finita. Dimostrare che

$$\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V).$$