Corso di Algebra 2 - a.a. 2014-2015

Prova scritta del 18.1.2016

Esercizio 0.1. *Sia $P(X) = X^5 - 26X + 13 \in \mathbb{Q}[X]$.*

1. *Dire se P è risolubile per radicali e determinare il suo gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$.*
2. *Consideriamo ora P a coefficienti in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Determinare il gruppo di Galois di $P(X)$ su $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.*

Soluzione. 1.P è irriducibile su $\mathbb{Q}$ grazie al criterio di Eisenstein applicato con il primo 13. Si vede facilmente che P ha esattamente 3 radici reali, quindi il suo gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ è isomorfo a S_5 che non è risolubile, quindi P non è risolubile per radicali.

2. Su $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ il polinomio diventa $X^5 + X + 1 = (X+2)^2(X^3 + 2X^2 + 1)$, quindi il gruppo di Galois G di P su $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ è il gruppo di Galois del polinomio $g(X) = X^3 + 2X^2 + 1$ su $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. g ìrriducibile in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$ perché non ha radici in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Quindi il gruppo di Galois di P su $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ è isomorfo a $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. □

Esercizio 0.2. *Sia $P(X) = X^8 + 5X^4 + 4 \in \mathbb{Q}[X]$.*

1. *Determinare un campo di spezzamento K di $P(X)$ su $\mathbb{Q}$.*
2. *Determinare il gruppo di Galois di $P(X)$.*
3. *Descrivere il reticolo dei campi intermedi dell'estensione $\mathbb{Q} \subset K$.*

Risoluzione. Fattorizziamo:

$$\begin{aligned} P(X) &= (X^4+1)(X^4+4) \\ &= (X^4+1)(X^4+4X^2+4-4X^2) \\ &= (X^4+1)(X^2-2X+2)(X^2+2X+2). \end{aligned}$$

Notiamo che $X^4 + 1 = \Phi_8(X)$, l'ottavo polinomio ciclotomico. Sia $\zeta = e^{\frac{i\pi}{4}}$ una radice ottava primitiva dell'unità. Notiamo che

$$\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Consideriamo ora i polinomi di secondo grado $X^2 - 2X + 2$ e $X^2 + 2X + 2$. Il loro discriminante è lo stesso, ed è dato da

$$\Delta = 4 - 8 = -4.$$

Possiamo concludere che $K = \mathbb{Q}(\zeta, \sqrt{-4})$ è un campo di spezzamento di $P(X)$ su $\mathbb{Q}$, dove $\sqrt{-4}$ è una radice quadrata di -4; possiamo scegliere $\sqrt{-4} = 2i$, e in definitiva:

$$K = \mathbb{Q}(\zeta, i) = \mathbb{Q}(\zeta),$$

poiché $\zeta^2 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$. Notiamo poi che $\mathbb{Q}(\zeta) \subseteq \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$, ed entrambe le estensioni hanno grado 4 su $\mathbb{Q}$. Concludiamo che $K = \mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. Il gruppo di Galois di $P(X)$ è dunque $\mathbb{Z}_8^* \cong C_2 \times C_2$. Esso possiede tre sottogruppi di indice 2, che corrispondono a tre estensioni quadratiche intermedie tra $\mathbb{Q}$ e K: si vede subito che tali estensioni sono $\mathbb{Q}(i), \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$. □

Esercizio 0.3. *Sia G un gruppo di cardinalità* 585.

1. *Dimostrare che G è risolubile.*
2. *Dimostrare che G ha un sottogruppo normale di ordine 65.*
3. *Supponendo che i* 3*-Sylow siano ciclici, dare un esempio di un gruppo di cardinalità* 585 *non abeliano.*

Soluzione. 1. Si ha $585 = 13 \cdot 5 \cdot 9$. Il numero dei 13-Sylow è congruo a 1 modulo 13 e divide $|G|$, quindi esiste un unico 13-Sylow $H \cong \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ che pertanto è normale in G ed è risolubile perché è abeliano. Allora basta dimostrare che $G' := G/H$ è risolubile. Ma $|G'| = 45$ e il numero dei 5-Sylow in G' è congruo ad 1 modulo 5 e divide 45, quindi è 1. Allora in G' c'è un unico 5-Sylow $H' \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ che è normale in G' ed è risolubile perché è abeliano. Poiché $|G'/H'| = 3^2$, sappiamo che G'/H' è abeliano e quindi è risolubile, quindi anche G' è risolubile e quindi G è risolubile.

2. Il numero dei 5-Sylow in G è congruo a 1 modulo 5 e divide $|G|$, quindi esiste un unico 5-Sylow $K \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ che pertanto è normale in G.

Poiché H è normale in G, si ha $HK = KH$ e quindi HK è un sottogruppo di G e la cardinalità di HK è uguale a $|H| \cdot |K|$= 65 dato che $|H \cap K| = 1$ perché $|H \cap K|$ deve dividere sia $|H| = 13$ che $|K| = 5$. Poiché anche K è normale in G, si ha $HK \cong H \times K \cong \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5 \cong \mathbb{Z}/65\mathbb{Z}$. Inoltre HK è normale in G perché $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, $\forall k \in K$, si ha $g(hk)g^{-1} = (ghg^{-1})(gkg^{-1}) \in HK$ perché H e K sono normali in G. Quindi $M := HK$ è un sottogruppo normale di G di cardinalità 65.

3. Sia L un 3-Sylow, $M = HK$ è normale in G, quindi LM è un sottogruppo di G e si ha $|LM| = \frac{|L| \cdot |M|}{|L \cap M|}$. Ma $|L \cap M|$ deve dividere sia $|L| = 9$ che $|M| = 65$, quindi $|L \cap M| = 1$ e dunque $G = LM$. Quindi G è un prodotto semidiretto di L ed M e L agisce per coniugio su M. Per ipotesi sappiamo che L è ciclico, $L = \langle g \rangle$, $o(g) = 9$. Il sottogruppo $M \cong \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5 = \langle x, y \mid x^{13} = 1,\ y^5 = 1,\ xy = yx \rangle$. Basta allora prendere l'azione di L su M data dall'omomorfismo $\psi : L \to Aut(M)$ definito da $\psi(g)(x) = gxg^{-1} = x^3$, $\psi(g)(y) = gyg^{-1} = y$. Vediamo infatti che ψ è ben definita perché $o(\psi(g)) = 3 | o(g) = 9$. Infatti $\psi(g)^3(x) = g^3xg^{-3} = x^{27} = x$, $\psi(g)^3(y) = y$. Dato che ψ non è banale, il gruppo così ottenuto non è abeliano.

□