Corso di Algebra 2 - a.a. 2015-2016
Prova scritta del 10.2.2017

Esercizio 1
Sia $P(X) = X^5 + X^4 + X^3 + 11X^2 + 11X + 11 \in \mathbb{Q}[X]$.

1. Determinare una fattorizzazione di $P(X)$ in irriducibili in $\mathbb{Q}[X]$ e in $\mathbb{F}_7[X]$.

2. Determinare il gruppo di Galois di $P(X)$ su $\mathbb{Q}$.

3. Determinare il gruppo di Galois di $P(X)$ su $\mathbb{F}_7[X]$.

Risoluzione. 1. $P(X) = (X^2 + X + 1)(X^3 + 11)$ e $X^3 + 11$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$ grazie al criterio di Eisenstein applicato con il primo 11, mentre $X^2 + X + 1$ è il terzo polinomio ciclotomico che è irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$.

In $\mathbb{F}_7[X]$ si ha $X^2 + X + 1 = (X - 2)(X - 4)$, mentre $X^3 + 11 = X^3 + 4$ è irriducibile perché non ha radici in $\mathbb{F}_7$. Pertanto una fattorizzazione di $P(X)$ in $\mathbb{F}_7[X]$ è data da $P(X) = (X - 2)(X - 4)(X^3 + 4)$.

2. La radici di $X^2 + X + 1$ sono ξ, ξ^2 dove ξ è una radice terza primitiva dell'unità. Le radici di $X^3 + 11$ sono $\alpha := -11^{\frac{1}{3}}$, $\alpha\xi$, $\alpha\xi^2$, dunque un campo di spezzamento per $P(X)$ su $\mathbb{Q}$ è $L := \mathbb{Q}(\alpha, \xi)$ e quindi il gruppo di Galois di $P(X)$ è il gruppo di Galois G di $X^3 + 11$ che è isomorfo a S_3. Questo si può dimostrare osservando che il gruppo di Galois di una cubica irrididucibile è un sottogruppo transitivo di S_3 e dunque o è ciclico o è isomorfo a S_3. Calcolando il discriminante della cubica e vedendo che è negativo si conclude che $G \cong S_3$. Altrimenti si può osservare che $\Gamma := G(\mathbb{Q}(\alpha, \xi), \mathbb{Q}(\xi))$ è un sottogruppo di G che è normale in G perché $\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}$ è un'estensione normale. Inoltre Γ è ciclico di ordine 3 generato da $\sigma : L \to L$, $\sigma(\alpha) = \alpha\xi$ (e ovviamente $\sigma(\xi) = \xi$). Si ha inoltre che $G/\Gamma \cong G(\mathbb{Q}(\xi), \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2$ e quindi $|G| = 6$. Pertanto $G \cong S_3$.

3. In $\mathbb{F}_7[X]$ si ha $P(X) = (X - 2)(X - 4)(X^3 + 4)$, quindi il gruppo di Galois di $P(X)$ su $\mathbb{F}_7$ è il gruppo di Galois della cubica irriducibile $X^3 + 4$ che è isomorfo a $\mathbb{Z}/3$. $\square$

Esercizio 2
Sia $f(X) = -X^{20} + X^{15} + 7X^5 - 7 \in \mathbb{Q}[X]$.

1. Determinare un campo di spezzamento $f(X)$ su $\mathbb{Q}$.

2. Dimostrare che il gruppo di Galois G di f su $\mathbb{Q}$ ha un sottogruppo normale di ordine 15.

3. Dire se G è abeliano.

4. Dire se f è risolubile per radicali.

Risoluzione. 1. $f(X) = -X^{20} + X^{15} + 7X^5 - 7 = (1 - X^5)(X^{15} - 7) = (1 - X)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)(X^{15} - 7)$. Le radici del polinomio ciclotomico $\phi_5 = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ sono ω^i, con $i = 1, 2, 3, 4$, dove $\omega = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, mentre le radici di $X^{15} - 7$ sono $\{\beta\eta^j,\ j = 0, ..., 14\}$, dove $\beta = 7^{\frac{1}{15}}$, $\eta = e^{\frac{2\pi i}{15}}$. Dato che $\omega = \eta^3$, un campo di spezzamento di f su $\mathbb{Q}$ è $L := \mathbb{Q}(\beta, \eta)$.

2. Sia G il gruppo di Galois di f su $\mathbb{Q}$. Consideriamo il sottogruppo $H := G(L, \mathbb{Q}(\eta))$ di G. Per il teorema fondamentale della teoria di Galois sappiamo che H è un sottogruppo normale di G, dato che l'estensione $\mathbb{Q}(\eta) : \mathbb{Q}$ è normale perché è un campo di spezzamento del polinomio ciclotomico ϕ_{15}. Per determinare l'ordine di H possiamo osservare che $[\mathbb{Q}(\eta) : \mathbb{Q}] = 8$ perché ϕ_{15} è il polinomio minimo di η su $\mathbb{Q}$ e ϕ_{15} ha grado 8. Si ha inoltre $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 15$ perché il polinomio minimo di β su $\mathbb{Q}$ è $X^{15} - 7$. Inoltre per la regola della torre abbiamo: $[L : \mathbb{Q}] = [L : \mathbb{Q}(\eta)][\mathbb{Q}(\eta) : \mathbb{Q}] = [L : \mathbb{Q}(\beta)][\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] \leq 8 \cdot 15 = 120$ e sia 15 che 8 dividono $[L : \mathbb{Q}]$, quindi $120 = [L : \mathbb{Q}] = |G|$ e inoltre $|H| = [L : \mathbb{Q}(\eta)] = 15$. Pertanto H è un sottogruppo normale di G di ordine 15.

3. Dimostriamo che G non è abeliano esibendo due elementi di G che non commutano. Siano $\sigma, \tau : L \to L$, $\sigma(\beta) = \beta\eta$, $\sigma(\eta) = \eta$, $\tau(\beta) = \beta$, $\tau(\eta) = \eta^2$. L'elemento σ ha ordine 15 ed è in H, quindi è un generatore di H, mentre $\tau \in G(L, \mathbb{Q}(\beta)) < G$ è un elemento di ordine 4. Si ha $\tau\sigma(\beta) = \tau(\beta\eta) = \beta\eta^2$, $\sigma\tau(\beta) = \sigma(\beta) = \beta\eta \neq \beta\eta^2$, quindi $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

4. Si ha $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\beta) \subset \mathbb{Q}(\beta, \eta)$ e $\beta^{15} = 7 \in \mathbb{Q}$, $\eta^{15} = 1 \in \mathbb{Q}(\beta)$. Dunque $\mathbb{Q}(\beta, \eta) : \mathbb{Q}$ è un'estensione radicale su cui f si spezza, quindi f è risolubile per radicali. □

Esercizio 3 Sia G un gruppo di ordine 120 con un unico 3-Sylow e con un unico 5-Sylow.

1. Dire se G è isomorfo ad un prodotto semidiretto di due gruppi.
2. Dire se G è risolubile.
3. Dare un esempio di un tale gruppo non abeliano.

Risoluzione. 1. Sia H l'unico 3-Sylow e sia K l'unico 5-Sylow. Per il teorema di Sylow questi sottogruppi sono normali in G. Si ha quindi che $HK = KH$ è un sottogruppo di G (per questo basta che uno dei due sia normale). Inoltre HK è normale in G perché $\forall g \in G$ e $\forall h \in H$, $\forall k \in K$, si ha $g(hk)g^{-1} = (ghg^{-1})(gkg^{-1}) \in HK$ perché H e K sono entrambi normali. Questo ci dice anche che $T := HK \cong H \times K \cong \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/5 \cong \mathbb{Z}/15$. Sia F un 2-Sylow, $TF = FT$ è un sottogruppo di G perché T è normale. Poiché $|F \cap T|$ deve dividere sia $|F| = 8$ che $|T| = 15$, si ha $F \cap T = (e)$ e quindi $|FT| = |F| \cdot |T| = 8 \cdot 15 = 120$. Quindi $G = FT$ e quindi G è il prodotto semidiretto interno di T e F.

2. Il sottogruppo normale T di G è risolubile perché è ciclico. Il quoziente G/T ha ordine $8 = 2^3$ e dunque è risolubile, quindi anche G è risolubile.

3. Basta prendere $G = D_4 \times \mathbb{Z}/15$. □