

**Corso di Algebra 1 - a.a. 2020-2021**

*Prova scritta del 17.06.2021*

**Esercizio 1**

Sia  $G$  un gruppo di ordine 16. Supponiamo che esista un sottogruppo  $H = \langle x \rangle$  normale di  $G$  ciclico di ordine 8, che esista un sottogruppo  $T = \langle y \rangle$  di  $G$  di ordine 2 tali che  $H \cap T = (e)$  e  $yx y^{-1} = x^5$ .

1. Determinare il centro di  $G$ .
2. Dire se esiste un omomorfismo suriettivo  $\phi : G \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .
3. Dire se  $G$  è isomorfo al gruppo diedrale  $D_8$ .

**Esercizio 2**

Siano  $J = (X^2, 5) \subset \mathbb{Z}[X]$ ,  $I = (X^5 + 5X + 10) \subset \mathbb{Z}[X]$ .

1. Dire se  $I$  è primo e/o massimale in  $\mathbb{Z}[X]$  e in  $\mathbb{Q}[X]$ .
2. Dire se  $J$  è primo e/o massimale in  $\mathbb{Z}[X]$ .
3. Dire se è vero che si ha:  $I \subset J$ ,  $I \neq J$  e  $J \neq \mathbb{Z}[X]$ .