TUTORATO DI ALGEBRA LINEARE 14 nov 17

Esercizio 1

Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base standard di $\mathbb{R}^3$ e sia

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Verificare che $\mathcal{B}$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$

(b) Sono tre vettori l.i. di $\mathbb{R}^3$? Costituiscono una base

Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ z \\ y \end{pmatrix}$$

(c) Verificare che F è lineare

(d) Determinare poi $(M_F)^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$, $(M_F)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$, $(M_F)^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$, $(M_F)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$

Esercizio 2

Sia $$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

(a) Definire span $\mathcal{G}$

(b) span $\mathcal{G} = \mathbb{R}^4$?

(c) $\mathcal{G}$ costituisce un insieme di vettori lin. indi.?

(d) estrarre da $\mathcal{G}$ una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 3

Sia $V := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $\exists\, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{t} + \alpha_2 e^{-t} \quad \forall t \in \mathbb{R} \}$$

(a) Si verifichi che V è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

(b) Mostrare che $\mathcal{B} = \{f, g, h\}$ con $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definite:

$$f(t) = 1 + e^{t}$$
$$g(t) = 1 + e^{t} + e^{-t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$h(t) = e^{t} - 2e^{-t}$$

è una base per V.

(c) sia $D : V \longrightarrow V$ l'applicazione lineare tale che

$$D(f) = f' \qquad f'(t) := e^{t}$$
$$D(g) = g' \qquad g'(t) := e^{t} - e^{-t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$D(h) = h' \qquad h'(t) := e^{t} + 2e^{-t}$$

Si calcoli $(M_D)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$

(d) Si mostri che esiste una base $\mathcal{B}'$ tale che $(M_D)^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}$ è diagonale.

(e) Si scriva le matrici del cambiamento di base $(M_{Id})^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$ e $(M_{Id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ e si verifichi che $(M_D)^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'} = (M_{Id})^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} \cdot (M_D)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \cdot (M_D)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$

s 4) Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ y + 3x \\ x \end{pmatrix}$$

e siano $\mathcal{E}_2 = \{e_1 ; e_2\}$ ed $\mathcal{E}_3 = \{e_1 ; e_2 ; e_3\}$

) Definire $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ e calcolarli dandone una base

) Calcolare $\left(M_f\right)_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}$

ia $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - 2z \\ y \end{pmatrix}$$

) Calcolare $\operatorname{Ker} g$ e $\operatorname{Im} g$ dandone una base

) Calcolare $\left(M_g\right)_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}$

) Calcolare $\left(M_{g \circ f}\right)_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2}$ e $\left(M_{f \circ g}\right)_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}$

s 5) (a) Determinare per quale $t \in \mathbb{R}$ $\exists$ $f_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineare tale che

$$f_t \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t+1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_t \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2-1 \\ 0 \\ t^3-t \end{pmatrix} \quad f_t \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ t \end{pmatrix} \quad f_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 \\ -t+4 \\ t+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Per tali valori f_t è unica?

Si scriva la matrice $\left(M_{f_t}\right)_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}$

Calcolare $\operatorname{Ker} f_t$ e $\operatorname{Im} f_t$ dandone una base

: Es 6) Sia $A \in M(n\times n, \mathbb{C})$ e sia

$$g : M(n\times n, \mathbb{C}) \longrightarrow M(n\times n, \mathbb{C})$$
$$B \longmapsto A \cdot B$$

(a) Si mostri che g è lineare

(b) Si caratterizzi $\operatorname{Ker} g$ in termini di $\operatorname{Im} B$ e $\operatorname{Ker} A$

Sia $n=2$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & i+1 \end{pmatrix}$ e sia $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$

(c) si calcoli $(M_g)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$