Scritto di Geometria 2
3/9/2018 - a.a. 2017-2018

Esercizio 1
Siano $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \sigma(u,v) = (u+v, u-v, 2u^2 - 2v^2 + 2)$,
$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ F(x,y,z) = (y,x,z)$.

1. Dimostrare che $S := Im(\sigma)$ è una superficie regolare e che σ è una parametrizzazione di S.

2. Dimostrare che F si restringe ad un'isometria di S.

3. Sia $C = \{(x,y,z) \in S \mid F(x,y,z) = (x,y,z)\}$. Dire se C è una geodetica in S.

4. Calcolare la curvatura di C e la curvatura normale di C.

Esercizio 2
Sia $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 = 2y^2z + 1\}$.

1. Dimostrare che Σ è una superficie regolare e orientabile e scrivere esplicitamente una mappa di Gauss per Σ.

2. Sia $W := \Sigma \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0\}$. Dare una parametrizzazione di W.

3. Determinare i punti parabolici di W.

4. Dire se esiste un'isometria F di S tale che $F(0,1,-\frac{1}{2}) = (1,1,0)$.

Esercizio 3
Siano $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) = (t, t^2, t^3),\ \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \alpha(t) = (t, t^2+1, t^3)$,
$X = \mathrm{Im}(\gamma)$, $Y = \mathrm{Im}(\alpha)$, $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$.

1. Determinare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 - X$.

2. Determinare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 - (X \cup Y)$.

3. Determinare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 - (X \cup Z)$.

4. Dire se $\mathbb{R}^3 - (X \cup Y)$ e $\mathbb{R}^3 - (X \cup Z)$ sono omotopicamente equivalenti.