

Corso di Algebra Lineare - a.a. 2016-2017

Prova scritta del 20.2.2017

COMPITO A

Esercizio 1

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso A e B i punti di coordinate rispettivamente $(2, -1, 0)$ e $(0, -3, 1)$; v_1, v_2 i vettori ${}^t(2, 1, 1)$, ${}^t(1, 2, 1)$; P, O i punti di coordinate rispettivamente $(-4, 2, 1)$ e $(-3, -1, 2)$; sia infine r_2 la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y - z = -2 \\ x + 3z = 1 \end{cases}.$$

- (1) Determinare equazioni cartesiane per la sfera S di centro O e raggio 3, per il piano π passante per P e la cui giacitura è generata da v_1 e v_2 e per la retta r_1 passante per A e per B ;
- (2) determinare le posizioni relative di r_2 e S , di π e S , di r_1 e r_2 ;
- (3) siano S_1 e S_2 due sfere di raggio R i cui centri (rispettivamente O_1 e O_2) distano tra loro $6R$. Un punto T giace sul piano passante per il punto O_2 e perpendicolare alla retta contenente O_1 e O_2 , a distanza $8R$ da O_2 . Esistono (e, nel caso, in numero finito o infinito) sfere tangenti a S_1 e a S_2 che abbiano centro in un punto Q tale che $d(T, Q) \leq 3R$? E se la sfera S_1 avesse raggio $3R$, quale sarebbe la risposta?

Punti: (3+4+3)

Esercizio 2

Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro reale t , $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F_t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ \frac{3}{4}(1 - t^2) \\ 4 \end{pmatrix}, F_t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ -\frac{1}{2} + \frac{t^2}{4} \\ t^2 \end{pmatrix}, F_t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2}t^2 - 2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

- (1) Determinare la matrice A_t associata a F_t nella base standard in partenza e in arrivo.
- (2) Dire per quali valori del parametro reale t , A_t è diagonalizzabile su \mathbb{R} .
- (3) Calcolare autovalori e autovettori di A_{-2} .

(4) Determinare la segnatura di $B_t = \begin{pmatrix} (t-2)^2 & t(t-2) & t^2+1 & 0 \\ t(t-2) & t^2 & 0 & 1 \\ t^2+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ al variare del parametro

reale t .

Punti: (4+4+3+4)

Esercizio 3

- (1) Dire se è vero o falso che tutte le matrici $A \in M(3, \mathbb{R})$ invertibili tali che $A^5 = A$ sono diagonalizzabili.
- (2) Dire se è vero o falso che per ogni $A \in M(4, \mathbb{R})$, ${}^tA - A$ è diagonalizzabile su \mathbb{C} .
- (3) Dire se è vero o falso che per ogni $A \in M(4, \mathbb{R})$, ${}^tA - A$ è diagonalizzabile su \mathbb{R} .
- (4) Dire se è vero o falso che per ogni $A, B \in M(5, \mathbb{R})$ di rango 1, $A - B$ ha rango minore o uguale di 2.

Punti: (1+1+2+1)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2016-2017

Prova scritta del 20.02.2017 Risultati

Nome:

Cognome:

Matricola:

Anno di corso:

Mat.

Fis.

(crocettare)

Compito

A

B

C

D

(crocettare)

ESERCIZIO 1

(1)

(2)

(3)

ESERCIZIO 2

(1)

(2)

(3)

(4)

ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)

(1) V F

(2) V F

(3) V F

(4) V F