Scritto di Geometria 2
18/02/2019 - a.a. 2017-2018

Esercizio 1
Sia $\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, una curva piana regolare e biregolare parametrizzata per lunghezza d'arco. Sia $\gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(s) = \alpha(s) + \frac{1}{s}\mathbf{b}(s)$, dove $\mathbf{b}$ è la torsione di α.

1. Mostrare che γ è regolare e biregolare.
2. Determinare il triedro di Frenet di γ in funzione di quello di α.
3. Determinare la curvatura di γ in funzione della curvatura di α e dire se γ è una curva piana.

Esercizio 2
Sia $\sigma : \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u, v > 0\} \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(u, v) = (u^3, v^2u, u^2v)$ e sia S l'immagine di σ.

1. Mostrare che σ è una parametrizzazione di S.
2. Determinare la prima e la seconda forma fondamentale di σ.
3. Dire se S è localmente isometrica ad una sfera.
4. Determinare l'unica geodetica di S passante per $P = \sigma(1, 1)$ e avente direzione data da $w = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_u + \sigma_v)(1, 1)$.

Esercizio 3
Siano $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0,\ x^2y + z^3 = 0\}$, $P = (1, -1, 1)$, $Q = (2, -2, 2)$.

1. Dimostrare che X è connesso per archi.
2. Determinare il gruppo fondamentale di X.
3. Determinare il gruppo fondamentale di $X \setminus \{P\}$ e di $X \setminus \{P, Q\}$.