

Corso di Algebra Lineare - a.a. 2015-2016

Prova scritta del 3.2.2016

COMPITO C

Esercizio 1

Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Siano in esso P_1, P_2 e P_3 i punti di coordinate rispettivamente $(0, -1, 1), (4, 2, -1)$ e $(5, 4, -2)$; C e A i punti di coordinate rispettivamente $(2, 3, 1)$ e $(-1, 1, 1)$; inoltre, sia v il vettore ${}^t(2, -1, 3)$ e S la sfera di centro C e raggio 2.

- (1) Scrivere equazioni cartesiane per la retta r passante per P_1 e di giacitura generata dal vettore v , il piano π_1 passante per P_1, P_2 e P_3 e il piano π_2 passante per A e di giacitura ortogonale a v ;
- (2) determinare le posizioni relative di π_1 e S , di r e S , di π_1 e π_2 ;
- (3) siano π un piano e S_1, S_2 due sfere esterne l'una all'altra, di raggio diverso e contenute nello stesso semispazio rispetto al piano π . Dimostrare che esiste una sfera tangente contemporaneamente a π, S_1 e S_2 . Ne esistono infinite?

Punti: (3+4+3)

Esercizio 2 Si consideri l'applicazione lineare dipendente da un parametro reale t ,

$F_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che

$$F_t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+3 \\ 4t+2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t-3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ \frac{t}{2}+2 \end{pmatrix},$$

$$F_t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t+6 \\ t+4 \\ -2t+1 \\ -\frac{3t}{2}+2 \end{pmatrix}.$$

- (1) Determinare la matrice A_t associata a F_t nelle basi canoniche di \mathbb{R}^4 .
- (2) Dire per quali valori del parametro reale t , A_t è diagonalizzabile su \mathbb{R} .
- (3) Calcolare autovalori e autovettori di A_{-2} .
- (4) Determinare la segnatura di $B_t = \begin{pmatrix} t^2 & t & 0 \\ t & 1 & t+1 \\ 0 & t+1 & (t+1)^2 \end{pmatrix}$ al variare del parametro reale t .

Punti: (4+4+3+4)

Esercizio 3

- (1) Dire se è vero o falso che 1 è un autolavore di A , per ogni $A \in M(5, \mathbb{R})$ tale che $A \neq -I$ e $A^2 = I$.
- (2) Dire se è vero o falso che 1 è un autolavore di A , per ogni $A \in M(2, \mathbb{R})$ tale che $A^3 = I$.
- (3) Sia $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica non degenera e indefinita. Dire se è vero o falso che esiste $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ tale che $\phi(v, v) = 0$.
- (4) Sia $\psi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica non degenera. Dire se è vero o falso che esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ di dimensione 3 tale che $\psi|_{W \times W}$ sia identicamente nulla.

Punti: (1+1+1+2)

Corso di Algebra lineare - a.a. 2015-2016*Prova scritta del 03.02.2016 Risultati*

Nome:

Cognome:

Matricola:

Anno di corso:

Mat.

Fis.

(crocettare)

Compito

A**B****C****D**

(crocettare)

ESERCIZIO 1

(1)

(2)

(3)

ESERCIZIO 2

(1)

(2)

(3)

(4)

ESERCIZIO 3 (crocettare V=vero o F= falso)

(1) V F

(2) V F

(3) V F

(4) V F