

V.A GEOMETRICA

Si definisce v.a. geometrica (modificata) di parametro p la v.a. discreta che assume i valori interi positivi la cui densità di probabilità è

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1}p \quad \text{per } k = 1, 2, 3, \dots$$

Modellizza l'istante di primo successo in prove Bernoulliane ripetute identiche e indipendenti.

Si può dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k-1}p = 1$$

e

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} \quad \text{var}(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > n) &= \mathbb{P}(X = n + 1) + \mathbb{P}(X = n + 2) + \dots = (1 - p)^n p + (1 - p)^{n+1} p + \dots \\ &= (1 - p)^n \underbrace{[p + (1 - p)p + (1 - p)^2 p + \dots]}_{=1} = (1 - p)^n \end{aligned} \quad (1)$$

Vale la proprietà di mancanza di memoria

$$\mathbb{P}(X = n + k | X > n) = \mathbb{P}(X = k) \quad (2)$$

per ogni $n, k \geq 1$.

Dimostriamola. Si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = n + k | X > n) &= \frac{\mathbb{P}(\{X = n + k\} \cap \{X > n\})}{\mathbb{P}(X > n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = n + k)}{\mathbb{P}(X > n)} \\ &\stackrel{da (1)}{=} \frac{(1 - p)^{n+k-1}p}{(1 - p)^n} = (1 - p)^{k-1}p = \mathbb{P}(X = k) \end{aligned}$$

ESEMPIO

La durata di vita in anni di una apparecchiatura elettronica segue una distribuzione esponenziale con media pari a 9 anni.

Calcolare la probabilità che l'apparecchiatura elettronica

- abbia una durata di almeno 7 anni
- abbia una durata di almeno 7 anni, sapendo che è già durata 4 anni
- duri al massimo 10 anni

V.A. ESPONENZIALE

Si definisce v.a. esponenziale di parametro $\lambda > 0$ la v.a. discreta che assume i valori positivi la cui densità di probabilità è

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

La sua funzione di ripartizione vale

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$$

Quindi si ha che $\mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t}$ per $t > 0$.

Si può dimostrare che

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Vale la proprietà di mancanza di memoria

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > s) = \mathbb{P}(X > t) \tag{3}$$

per ogni $t, s > 0$.

Dimostriamola. Si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > t + s | X > s) &= \frac{\mathbb{P}(\{X > t + s\} \cap \{X > s\})}{\mathbb{P}(X > s)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > s)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(X > t) \end{aligned}$$

ESEMPIO

Ad una roulette, fatta di 37 numeri che vanno da 0 a 36, si scommette ripetutamente sull'uscita di un numero compreso tra 1 e 11 (estremi inclusi).

Calcolare la probabilità

i) di perdere le prime 5 giocate;

ii) che la prima vincita accada nella sesta giocata.