Corso di Introduzione alla Topologia Algebrica - a.a. 2007-08

Prova scritta del 25.9.2008

1. Sia $Z = Y = \mathbb{C}$, e sia n un intero positivo. Sia $\alpha\colon Z \to Y$ l'applicazione definita da $\alpha(z) = z^n$. Indichiamo con N l'insieme delle potenze n-esime in $\pi_1(Y \smallsetminus \{0\})$; è un sottogruppo perchè $\pi_1(Y \smallsetminus \{0\})$ è abeliano. Sia X uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi, e sia $\beta\colon X \to Y$ una applicazione continua. Mostrare che β si solleva ad una applicazione continua di X in Z, cioè che esiste una applicazione continua $\gamma\colon X \to Z$ tale che $\alpha\gamma = \beta$, se e solo se, per ogni componente connessa A di $X \smallsetminus \beta^{-1}(0)$, l'immagine di $\pi_1(A) \to \pi_1(Y \smallsetminus \{0\})$ è contenuta in N.

2. Sia X lo spazio topologico ottenuto da $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ identificando tra loro punti antipodali dell'"equatore" $\{(x, y, z) \in S^2 : z = 0\}$. Sia poi Y lo spazio topologico ottenuto da X identificando tra loro le immagini del "polo nord" $(0, 0, 1)$ e del "polo sud" $(0, 0, -1)$.

   (a) Calcolare i gruppi di omologia intera di X.

   (b) Calcolare i gruppi di omologia intera di Y.

Soluzioni

1. Se un sollevamento esiste, c'è anche un sollevamento di $A \to Y \smallsetminus \{0\}$ a una applicazione continua $A \to Z \smallsetminus \{0\}$, quindi l'immagine di $\pi_1(A)$ in $\pi_1(Y \smallsetminus \{0\})$ è contenuta in $\alpha_*(\pi_1(Z \smallsetminus \{0\}))$, che è uguale a N.

   Viceversa, supponiamo che $\beta_*(\pi_1(A)) \subset N$ per ogni A. Il teorema di sollevamento delle applicazioni garantisce che esiste un sollevamento $\gamma_A : A \to Z \smallsetminus \{0\}$ della restrizione di β ad A. Sia x un punto di X. Se $\beta(x) \neq 0$, x appartiene a una sola componente A di $X \smallsetminus \beta^{-1}(0)$; in questo caso poniamo $\gamma(x) = \gamma_A(x)$. Se invece $\beta(x) = 0$ poniamo $\gamma(x) = 0$. È chiaro che γ è un sollevamento di β. Il solo problema è mostrare che è continua. La continuità nei punti di $X \smallsetminus \beta^{-1}(0)$ segue immediatamente da quella delle γ_A. Supponiamo invece che $\beta(x) = 0$, e sia ε un numero positivo. Il disco V di centro 0 e raggio ε in Z è l'immagine inversa, via α, del disco V di centro 0 e raggio ε^n in Y. Per la continuità di β, esiste un intorno aperto W di x tale che $\beta(W) \subset V$. Da quanto appena detto segue che $\gamma(W) \subset U$. Dato che ε è arbitrario, questo mostra che γ è continua in x.

2. (a) Una decomposizione cellulare di X è la seguente. Lo 0-scheletro è costituito da un punto p dell'immagine dell'equatore di S^3, l'1-scheletro è l'immagine dell'equatore, e consta di p con attaccata una 1-cella e, mentre il 2-scheletro, che coincide con X, è ottenuto da X^1 attaccando due 2-celle d_1 e d_2, che sono le immagini dell'"emisfero nord" e dell'"emisfero sud" di S^3. Le mappe bordo sono date da:

$$\partial e = 0\,; \quad \partial d_1 = 2e\,; \quad \partial d_2 = -2e \tag{1}$$

   Quindi $H_1(X, \mathbb{Z})$ è isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e generato da $[e]$, mentre $H_2(X, \mathbb{Z})$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$ e generato da $[d_1] + [d_2]$. I gruppi $H_i(X, \mathbb{Z})$ con $i > 2$ sono nulli, mentre $H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

(b) Y ha lo stesso tipo di omotopia dello spazio ottenuto da X congiungendo polo nord e polo sud con una 1-cella. Questo spazio a sua volta ha lo stesso tipo di omotopia dello spazio Z ottenuto da X attaccando a p, con le due estremità, una 1-cella e'. Una decomposizione cellulare di Z si ottiene aggiungendo e' a quella di X costruita sopra. I relativi operatori bordo sono descritti da (1) e da $\partial e' = 0$. Ne segue che $H_i(Y, \mathbb{Z}) = H_i(X, \mathbb{Z})$ se $i \neq 1$, mentre $H_1(Y, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}e' \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})e$.