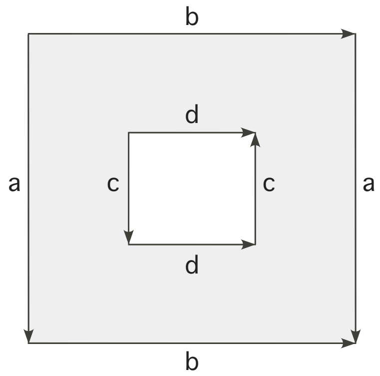
Corso di Introduzione alla Topologia Algebrica - a.a. 2006-2007

Prova scritta del 18.6.2007

1. Sia X lo spazio topologico ottenuto dal quadrato bucato (la zona grigia nella figura qui sotto) tramite le identificazioni indicate in figura.



   Calcolare gruppo fondamentale e gruppi di omologia intera di X.

2. Mostrare che ogni applicazione continua $\mathbb{RP}^n \to S^1$ è omotopicamente banale se $n \geq 2$. Cosa succede se $n = 1$?

Soluzioni

1. Sia q il vertice in alto a sinistra del quadrato esterno, e sia q' il vertice in alto a sinistra di quello interno. Scegliamo come punto base p il punto di mezzo del segmento qq', e siano f, f' i segmenti orientati che vanno da p a q e da p a q', rispettivamente. Poniamo $\alpha = f * a * f^{-1}$, $\beta = f*b*f^{-1}$, $\gamma = f'*c*f'^{-1}$, $\delta = f'*d*f'^{-1}$. Inoltre indichiamo con e la 2-cella costituita dal complementare di a, b, c, d, f, f'. Indichiamo con A il complementare dell'unione di a e b e con B quello dell'unione di c e d. L'intersezione $A \cap B$ ha lo stesso tipo di omotopia di un cerchio; indichiamo con h un cammino chiuso in $A \cap B$ con estremi in p la cui classe generi il gruppo fondamentale si $A \cap B$. L'unione di f', c, d è un retratto di deformazione di A. In particolare, il gruppo fondamentale di A è il gruppo libero generato da γ e δ. Allo stesso modo, l'unione di f, a, b è un retratto di deformazione di B, e il gruppo fondamentale di B è il gruppo libero generato da α e β. Inoltre h può essere scelto in modo che sia omotopo in A con estremi fissi a $\gamma\delta\gamma\delta^{-1}$. Allora h è omotopo in B con estremi fissi a $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$. Il teorema di van Kampen dice allora che il gruppo fondamentale di X è il quoziente del gruppo libero generato da $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ modulo il sottogruppo normale generato da $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\delta\gamma^{-1}\delta^{-1}\gamma^{-1}$. Indicando con $[\alpha]\ldots$ le classi di omologia di $\alpha\ldots$, $H^1(X)$, che è l'abelianizzato del gruppo fondamentale, è il quoziente del gruppo abeliano libero generato da $[\alpha], [\beta], [\gamma], [\delta]$ modulo il sottogruppo generato da $2[\gamma]$. Infine,
$$\partial e = 2\gamma\,,$$
   e quindi e non è un 2-ciclo. Ne segue che $H^2(X) = 0$.

   N.B.: si può arrivare agli stessi risultati notando che X è la somma connessa di un toro e di una bottiglia di Klein.

2. Se $n \geq 2$ il gruppo fondamentale di $\mathbb{RP}^n$ ha ordine 2, quindi per ogni applicazione continua $f\colon \mathbb{RP}^n \to S^1$ l'omomorfismo $f_*\colon \pi_1(\mathbb{RP}^n) \to \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ è l'omomorfismo nullo. Per il criterio di sollevamento, f si solleva a una applicazione continua $\widetilde{f}$ da $\mathbb{RP}^n$ al rivestimento universale di S^1, cioè a $\mathbb{R}$. Dato che $\mathbb{R}$ è contraibile, $\widetilde{f}$ è omotopicamente banale, e quindi lo è anche f. Se $n = 1$, $\mathbb{RP}^n$ è S^1, quindi le applicazioni da esso a S^1 sono classificate, a meno di omotopia, dal grado.