Corso di Introduzione alla Topologia Algebrica - a.a. 2005-2006

Prova scritta del 3.3.2006

1. Sia $f\colon Y \to X$ un rivestimento.

   (a) Mostrare che, se Y è una varietà topologica, anche X è una varietà topologica.

   (b) Mostrare che, se $Y = S^2$, allora f è un omeomorfismo oppure f ha grado 2 e X è omeomorfo a $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

2. Siano D_1, D_2 copie del disco D^2, siano S_1, S_2 copie di S^1, sia A l'anello $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$, e sia T il toro bidimensionale. Per $i = 1, 2$, siano $h_i\colon D_i \to S^3$ e $k_i\colon S_i \to S^3$ immersioni (omeomorfismi sull'immagine); supponiamo che $h_1(D_1) \cap h_2(D_2) = \emptyset$ e $k_1(S_1) \cap k_2(S_2) = \emptyset$. Siano $\varphi\colon A \to S^3$ e $\chi\colon T \to S^3$ immersioni.

   (a) Calcolare i gruppi di omologia di $S^3 - (h_1(D_1) \cup h_2(D_2))$.

   (b) Calcolare i gruppi di omologia di $S^3 - \varphi(A)$.

   (c) Calcolare i gruppi di omologia di $S^3 - (k_1(S_1) \cup k_2(S_2))$.

   (d) Mostrare che $S^3 - \chi(T)$ ha esattamente due componenti connesse. Più in generale, calcolarne i gruppi di omologia.