Corso di Teoria dei Gruppi - a.a. 2009-2010

Esercizi 7

1. Sia K un campo finito con q elementi, e sia p un primo. Mostrare che ci sono esattamente $(q^p - q)/p$ polinomi monici irriducibili di grado p in $K[X]$.

2. Trovare il gruppo di Galois di $X^4 - 2$ su $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_3$ e $\mathbb{F}_7$.

3. Trovare i gruppi di Galois di $X^3 - 5$ e di $X^3 + 5$ su $\mathbb{Q}$.

4. Calcolare esplicitamente il polinomio ciclotomico Φ_{p^n}, dove p è un primo.

5. Trovare il gruppo di Galois di $X^5 + 1$ e $X^6 + 1$ su $\mathbb{Q}$.

6. Mostrare che $X^6 + 3$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$, ma non su $\mathbb{Q}[\zeta]$, dove ζ è una radice sesta primitiva dell'unità.

7. Sia L uno splitting field si $X^4 - 13$ su $\mathbb{Q}$. Calcolare il gruppo di Galois di L su $\mathbb{Q}$ e trovare tutti i campi intermedi, individuando tra questi le estensioni normali di $\mathbb{Q}$.

8. Sia K un campo di caratteristica prima p, poniamo $P(X) = X^p - X - \eta$, dove $\eta \in K$, e sia L uno splitting field per P. Mostrare che, se α è una radice di P, le altre radici sono $\alpha+1, \alpha+2, \ldots, \alpha+p-1$. Mostrare che P si spezza completamente su K oppure è irriducibile in $K[X]$, nel qual caso il gruppo di Galois di L su K è ciclico di ordine p.