Corso di Teoria dei Gruppi - a.a. 2009-2010

Esercizi 5

Notazione. Siano E e F sottocampi di un campo L. Il *composto* di E e F, indicato con EF, è il più piccolo sottocampo di L contenente sia E che F. Il composto esiste in quanto può essere descritto come l'intersezione di tutti i sottocampi di L contenenti sia E che F. Inoltre, se K è un sottocampo sia di E che di F (ad esempio $K = E \cap F$), $EF = K(E \cup F)$; quando E ed F sono algebrici su K, $EF = K[E \cup F]$.

1. Sia L una estensione algebrica di K, e siano E e F sottocampi di L contenenti K. Supponiamo che E e F siano estensioni normali di K. Mostrare che $E \cap F$ e EF sono estensioni normali di K.

2. (a) Sia L una estensione algebrica di K. Mostrare che tra le estensioni normali di K contenute in L ne esiste una massima.

   (b) Trovare la massima estensione normale di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{7}]$.

3. Sia L una estensione algebrica di K, e siano E e F chiusure normali di L su K. Mostrare che esiste un isomorfismo di E su F la cui restrizione a L è l'identità.

4. (a) Sia L una estensione normale finita di K. Sia P un polinomio irriducibile in $K[X]$, e siano Q e R due fattori monici irriducibili di P in $L[X]$. Mostrare che esiste un automorfismo φ di L su K tale che $\varphi(Q) = R$.

   (b) Mostrare con un controesempio che questa conclusione può non essere vera se L non è normale su K.

5. Mostrare con un esempio che, se L è una estensione normale di K e F una estensione normale di L, non è necessariamente vero che F è una estensione normale di K.