Corso di Teoria dei Gruppi - a.a. 2009-2010

Esercizi 2

1. Descrivere i sottogruppi di Sylow di S_3, S_4 e A_5.
2. Quanti possono essere gli 11-Sylow e i 3-Sylow in un gruppo di ordine $3 \cdot 11^3$?
3. Mostrare che ogni gruppo di ordine $5 \cdot 7 \cdot 11$ ha un unico 11-Sylow e un unico 7-Sylow. Quanti possono essere i 5-Sylow?
4. Mostrare che ogni gruppo G di ordine $25 \cdot 49$ ha un sottogruppo normale di ordine 25 e uno di ordine 49. Dedurne che G è abeliano.
5. Sia G un gruppo di ordine p^2q, dove p e q sono primi. Mostrare che G ha un sottogruppo normale non banale.
6. Sia G un gruppo di ordine 231. Mostrare che l'11-Sylow è contenuto nel centro di G.
7. (a) Sia G un gruppo di ordine 30. Mostrare che G ha sottogruppi normali di ordini 3, 5, 15.

   (b) Classificare, a meno di isomorfismo, tutti i gruppi di ordine 30.
8. Sia G un gruppo finito, e sia H un suo sottogruppo di Sylow. Mostrare che $N(N(H)) = N(H)$.