LA NOZIONE DI VARIETÀ ALGEBRICA

MAURIZIO CORNALBA

Sia k un campo, e sia X uno spazio topologico. Per ogni aperto U di X indichiamo con $\mathcal{F}(U)$ la k-algebra delle funzioni $U \to k$. Supponiamo che sia assegnata, per ogni aperto U, una sotto-k-algebra $\mathcal{O}_X(U)$ di $\mathcal{F}(U)$ in modo che:

(1) per ogni coppia di aperti $W \subset U$ la restrizione di funzioni $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(W)$ manda $\mathcal{O}_X(U)$ in $\mathcal{O}_X(W)$;
(2) dati un aperto $U \subset X$, un suo ricoprimento aperto $U = \bigcup U_i$, e $f \in \mathcal{F}(U)$, se la restrizione di f a U_i appartiene a $\mathcal{O}_X(U_i)$ per ogni i, allora $f \in \mathcal{O}_X(U)$.

Diremo provvisoriamente che il dato delle $\mathcal{O}_X(U)$ costituisce una struttura di *spazio anellato* su X; in realtà la vera nozione di spazio anellato è assai più generale di quella data qui.

Supponiamo che X e Y siano spazi topologici dotati di una struttura di spazio anellato, e sia $f\colon X \to Y$ una applicazione continua. Per ogni aperto U di Y vi è una applicazione "pullback"

$$f_U^*\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(f^{-1}U)$$

definita da $f_U^*(v) = v \circ f$. Ovviamente f_U^* è un omomorfismo di k-algebre. Diremo che f è un *morfismo di spazi anellati* (o semplicemente un *morfismo*, quando non c'è rischio di equivoci) se $f_U^*(\mathcal{O}_Y(U)) \subset \mathcal{O}_X(f^{-1}U)$ per ogni aperto $U \subset Y$. È evidente che la composizione di morfismi di spazi anellati è ancora un morfismo di spazi anellati. Naturalmente diremo che un morfismo di spazi anellati $f\colon X \to Y$ è un isomorfismo se ammette una inversa, cioè se è un omeomorfismo e f^{-1} è un morfismo di spazi anellati.

Notiamo che ogni aperto U di uno spazio anellato X eredita da questo una struttura naturale di spazio anellato: basta porre $\mathcal{O}_U(W) = \mathcal{O}_X(W)$ per ogni aperto $W \subset U$. Una osservazione banale ma utile è che, dati uno spazio anellato Y e una applicazione $f\colon Y \to W$, e indicata con $j\colon W \to X$ l'inclusione, f è un morfismo se e solo se lo è $j \circ f\colon Y \to X$.

Gli spazi anellati abbondano in matematica. Ad esempio, dato uno spazio topologico X, si può scegliere come $\mathcal{O}_X(U)$ l'algebra delle funzioni continue a valori reali su U; naturalmente in questo caso $k = \mathbb{R}$. Un esempio più significativo è fornito da una varietà differenziabile X, dove $\mathcal{O}_X(U)$ è l'algebra delle funzioni differenziabili $U \to \mathbb{R}$.

Esercizio 1. Mostrare che i morfismi di spazi anellati tra varietà differenziabili sono esattamente le applicazioni differenziabili.

Fissiamo un campo k, *che d'ora in poi supporremo algebricamente chiuso.* Anche le varietà algebriche affini su k sono, in modo naturale, spazi anellati. Se X è una tale varietà, basta prendere come $\mathcal{O}_X(U)$ l'algebra delle funzioni regolari su U.

Diremo che uno spazio anellato X è una *varietà algebrica* (su k) se esiste un ricoprimento aperto finito $X = \bigcup X_i$ tale che ogni X_i sia isomorfo, come spazio anellato, a una varietà algebrica affine. I morfismi tra varietà algebriche sono i morfismi di spazi anellati. Diremo che un aperto di una varietà algebrica è un *aperto affine* se è isomorfo a una varietà affine. Data una varietà algebrica X e un suo aperto U, gli elementi di $\mathcal{O}_X(U)$ saranno anche detti

Date: 20 ottobre 2008.

funzioni regolari su U; questo uso del termine è coerente con quello fatto nel caso delle varietà affini.

Siano X e Y varietà affini e A, B i rispettivi anelli delle coordinate. Ogni omomorfismo di k-algebre $\varphi\colon B \to A$ determina una applicazione

$$\mu_\varphi\colon X \to Y$$

come segue. Per ogni punto $x \in X$ sia $\mathfrak{m}_x$ il corrisponente ideale massimale in A. L'ideale $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_x)$ è massimale in B. Infatti, da un lato $A/\mathfrak{m}_x \cong k$ per il teorema degli zeri, dall'altro $k \hookrightarrow B/\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_x) \hookrightarrow A/\mathfrak{m}_x$, e dunque

$$B/\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_x) \cong A/\mathfrak{m}_x \cong k \tag{1}$$

Indichiamo con $\mu_\varphi(x)$ il punto di Y corrispondente all'ideale massimale $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_x)$. Segue da (1) che

$$f(\mu_\varphi(x)) = \varphi(f)(x) \text{ per ogni } f \in B. \tag{2}$$

Una prima conseguenza è che $\mu_\varphi^{-1}(D_f) = D_{\varphi(f)}$, e dunque in particolare che μ_φ è continua. Una seconda conseguenza è che $\mu_\varphi^*(u)$ è una funzione regolare per ogni funzione regolare u su un aperto di Y. In altre parole, μ_φ è un morfismo.

Lemma 2. *L'applicazione $\varphi \mapsto \mu_\varphi$ stabilisce una corrispondenza biunivoca tra omomorfismi di k-algebre $B \to A$ e morfismi $X \to Y$. Inoltre, se Z è un'altra varietà affine con anello delle coordinate C, e $\psi\colon C \to B$ è un omomorfismo di k-algebre, $\mu_{\varphi\circ\psi} = \mu_\psi \circ \mu_\varphi$.*

Dimostrazione. L'ultima affermazione del lemma non necessita di dimostrazione. La formula (2) mostra in particolare che, se $\mu_\varphi = \mu_{\varphi'}$, allora $\varphi = \varphi'$. Resta da vedere che ogni morfismo da X a Y è della forma μ_φ. Sia $\alpha\colon X \to Y$ un morfismo. L'applicazione pullback $\alpha^*\colon B = \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X) = A$ è un omomorfismo di k-algebre. Per costruzione, se f è una funzione regolare su Y che si annulla in $\alpha(x)$, la funzione $\alpha^*(f)$ si annulla in x. Questo dice che $(\alpha^*)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_{\alpha(x)}$. In altre parole, $\alpha = \mu_\varphi$, con $\varphi = \alpha^*$. □

Corollario 3. *Le classi di isomorfismo di varietà algebriche affini su k sono in corrispondenza biunivoca con le classi di isomorfismo di k-algebre di tipo finito senza nilpotenti.*

Proposizione 4. *Sia X una varietà algebrica. Gli aperti affini costituiscono una base per la topologia di X.*

Dato che X è in ogni caso unione di varietà affini, basta limitarsi al caso in cui X è una varietà affine. Sia A l'anello delle coordinate di X. Sappiamo che una base per la topologia di X è costituita dagli aperti $D_f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$, al variare di f in A. La proposizione segue quindi dal risultato seguente.

Lemma 5. *D_f è una varietà affine con anello delle coordinate A_f.*

Dimostrazione. Possiamo scrivere $A = k[a_1, \ldots, a_n]$. Allora $A = k[\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n, \frac{1}{f}]$, dove $\overline{a}_i$ indica l'immagine di a_i in A_f. In particolare, A_f è una k-algebra di tipo finito. Inoltre A_f non contiene nilpotenti. Infatti dire che $(a/f^h)^\ell = 0$ equivale a dire che $f^t a^\ell = 0$ per qualche t, il che implica che $f^t a$ è nilpotente in A, e dunque nullo. Ciò a sua volta implica che $a/f^h = 0$.

Sia Y una varietà affine il cui anello delle coordinate sia A_f. Vogliamo costruire un isomorfismo di varietà algebriche tra Y e D_f. L'omomorfismo $q\colon A \to A_f$ fornisce un morfismo $\varphi\colon Y \to X$ che, tenuto conto della corrispondenza tra punti di una varietà affine e ideali massimali del corrispondente anello delle coordinate, può essere descritto come la mappa che associa a ogni ideale massimale N di A_f l'ideale massimale $q^{-1}(N)$ in A. Vediamo innanzitutto che questo morfismo mette in corrispondenza biunivoca Y con D_f. I punti di D_f corrispondono agli ideali massimali di A non contenenti f. Se M è uno di questi ideali, M_f è un ideale massimale di A_f. Infatti, se fosse $M_f = A_f$, l'1 di A_f dovrebbe appartenere a M_f, e dunque varrebbe una uguaglianza della forma $0 = f^\ell(m - f^h)$, con $m \in M$; ne risulterebbe che $f^{\ell+h} \in M$, e dunque, visto che M è primo, che $f \in M$, contro le ipotesi. Inoltre $q^{-1}(M_f)$ è un ideale massimale di A contenente M, e dunque uguale a M. Viceversa, se N è massimale in A_f, $q^{-1}(N)$ non contiene f, e $q^{-1}(N)_f$ è dunque un ideale massimale di A_f contenuto in N, e quindi uguale a N. Ciò mostra che le applicazioni $Y \to D_f$ e $D_f \to Y$ date, rispettivamente, da $N \mapsto q^{-1}(N)$ e da $M \mapsto M_f$ sono una inversa dell'altra. Gli aperti principali di Y sono tutti della forma $D_{\overline{g}}$, dove $g \in A$ e $\overline{g} = \frac{g}{1}$, ed è immediato verificare che φ pone in corrispondenza biunivoca $D_{\overline{g}}$ con $D_{fg} \subset D_f \subset X$. In particolare, $Y \to D_f$ è un omeomorfismo. Inoltre, $(A_f)_{\overline{g}} \cong A_{fg}$; in altre parole, φ dà un isomorfismo tra l'anello delle funzioni regolari su $D_{\overline{g}}$ e quello delle funzioni regolari su D_{fg}. Dato che gli aperti principali formano una base per la topologia di X, questo basta a concludere che $Y \to D_f$ è un isomorfismo di varietà algebriche. $\square$