Corso di Geometria 1 – a.a. 2014-2015

Prova scritta di topologia del 22 febbraio 2016

1. Siano X e Y spazi topologici e siano $A \subset X$ e $B \subset Y$ sottinsiemi di X e Y.
   (a) Mostrare che se A è chiuso in X e B chiuso in Y allora $A \times B$ è chiuso in $X \times Y$.
   (b) In generale mostrare che $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

2. Sia X uno spazio compatto e sia $\mathcal{C}$ lo spazio delle funzioni continue $X \to \mathbb{R}$, con la metrica usuale
$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$
Siano x_1, x_2, x_3 punti distinti di X e sia $\mathcal{F}$ il sottospazio di $\mathcal{C}$ costituito da tutte le funzioni f tali che
$$f(x_1) \leq f(x_2) + 1\,;\;\; f(x_2) = f(x_3)$$
   (a) $\mathcal{F}$ è uno spazio metrico completo?
   (b) $\mathcal{F}$ è compatto?

3. Sia U un sottoinsieme convesso e compatto di $\mathbb{R}^n$ e sia X lo spazio delle funzioni continue da U al cerchio S^1, con la topologia della convergenza uniforme. Dire quale di queste affermazioni è vera, giustificando le risposte:
   (a) X è di Hausdorff;
   (b) X è connesso;
   (c) X è compatto.

Soluzioni

1. (a) Il complementare di $A \times B$ è $X \times (Y \setminus B) \cup (X \setminus A) \times Y$. Ognuno dei due addendi è aperto in quanto i complementari di A e B sono aperti, rispettivamente in X e Y. Quindi il complementare di $A \times B$ è aperto.
   (b) Per il punto precedente $\overline{A} \times \overline{B}$ è un chiuso contenente $A \times B$. Quindi $\overline{A} \times \overline{B} \supset \overline{A \times B}$. Viceversa sia (x, y) un punto di $\overline{A} \times \overline{B}$. Ogni intorno di questo punto ne contiene uno della forma $U \times V$, dove U è un intorno aperto di x e V un intorno aperto di y. Allora $U \cap A \neq \emptyset$ e $V \cap B \neq \emptyset$, quindi $U \times V \cap A \times B \neq \emptyset$. Questo mostra che (x, y) appartiene alla chiusura di $A \times B$.

2. (a) Sì. Lo spazio $\mathcal{C}$ è completo, dato che $\mathbb{R}$ è completo. Sia ora $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in $\mathcal{F}$. Per la completezza di $\mathcal{C}$ la successione converge a $f \in \mathcal{C}$. Per concludere basta mostrare che $f \in \mathcal{F}$. In effetti
$$f(x_1) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_1) \leq \lim_{n\to\infty}(f_n(x_2) + 1) = f(x_2) + 1$$
$$f(x_2) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_2) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_3) = f(x_3)$$
   (b) No. Sia f_n la funzione costante che vale ovunque n. Questa funzione appartiene a $\mathcal{F}$. D'altra parte la successione $\{f_n\}$ non ha sottosuccessioni convergenti.

3. (a) Vero. La topologia della convergenza uniforme è indotta da una metrica, quindi lo spazio topologico che ne risulta è di Hausdorff.

   (b) Vero. Lo spazio X è addirittura connesso per archi. Scegliamo una volta per tutte un punto $p \in U$ e per ogni funzione f in X, ogni $t \in [0,1]$ e ogni $u \in U$ poniamo $f_t(u) = f(tp + (1-t)u)$. Questa definizione ha senso perché $tp + (1-t)u$ appartiene a U per la convessità di quest'ultimo. Dico che la funzione $t \mapsto f_t$ è continua. In effetti dato che U è compatto la funzione f è uniformemente continua, e inoltre la distanza da punti di U a p ha un massimo, che indichiamo con D. Se $t, t' \in [0,1]$,

$$\|(tp + (1-t)u) - (t'p + (1-t')u)\| = |t - t'|\|p - u\| \leq |t - t'|D$$

   Sia $\varepsilon > 0$. Esiste $\delta > 0$ tale che, se $\|u - w\| < \delta$, allora $|f(u) - f(w)| < \varepsilon$. Dunque se $|t - t'| < \delta/D$ allora

$$|f_t(u) - f_{t'}(u)| < \varepsilon$$

   In altre parole la distanza tra f_t e $f_{t'}$ non supera ε. Questo dimostra la continuità del cammino $t \mapsto f_t$, che congiunge $f = f_0$ alla funzione costante f_1 che vale ovunque $f(p)$. D'altra parte il sottospazio di X costituito da tutte le funzioni costanti è omeomorfo a S^1, e quindi connesso per archi.

   (c) In generale è falso. Mostriamolo ad esempio quando $U = [0,1]$. La funzione $\alpha : [-1,1] \to S^1$ data da

$$\alpha(s) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)\right)$$

   è un omeomorfismo sul semicerchio "superiore" $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\}$ ed è anche Lipschitziana con inversa Lipschitziana. La successione di funzioni $g_n : [0,1] \to [-1.1]$ data da

$$g_n(t) = \sin(nt)$$

   non ha sottosuccessioni convergenti, e quindi lo stesso vale anche per la successione delle funzioni $f_n = \alpha \circ g_n : [0,1] \to S^1$.