GEOMETRIA 1 - geometria proiettiva - 23 settembre 2015 - soluzione

1.

$R_1 \ : \ x' = y, \qquad y' = x \ ;$

$R_2 \ : \ x' = -x, \quad y' = y \ ;$

$R_3 \ : \ x' = 2 - x, \quad y' = y \ ;$

$H_1 \ : \ x' = -y, \quad y' = x \ ;$

$H_2 \ : \ x' = y + 2, \quad y' = x \ ;$

$H_3 \ : \ x' = x + 2, \quad y' = y + 2 \ .$

L'isometria H_1 è un'isometria diretta, precisamente è la rotazione attorno all'origine, di un angolo retto, in verso antiorario.

L'isometria H_2 è un'isometria inversa; si vede subito che non ha punti fissi nel piano euclideo, dunque è una glissosimmetria.

Non è evidente quale retta (del piano euclideo) sia (globalmente) fissa in H_2 .
Si può ragionare in vari modi.

Si può partire dall'equazione di una retta arbitraria, $ax+by+c = 0$, calcolare l'equazione della retta trasformata in H_2 (o nell'inversa), imporre la proporzionalità dei coefficienti. Si trova: $b = c = -a$; dunque la retta cercata ha equazione: $y = x - 1$.

Si può utilizzare la proprietà: in una glissosimmetrria, il punto medio di ogni segmento avente per estremi un punto e il suo corrispondente sta sulla retta (globalmente) fissa.

Si può procedere con i metodi della geometria proiettiva (v. oltre).

L'isometria H_3 è un'isometria diretta ed è evidentemente una traslazione. D'altra parte, è sempre vero che il quadrato di una glissosimmetria è una traslazione.

L'estensione di H_2 a $P_2(\mathbb{R})$ si effettua con il solito metodo e non presenta difficoltà.
I punti fissi si trovano con la consueta ricerca degli autovalori e degli autovettori. Sono i punti impropri delle bisettrici dei quadranti.

A partire dalla matrice trasposta, la ricerca degli autovettori (gli autovalori ovviamente coincidono) permette di trovare le rette fisse (in $P_2(\mathbb{R})$). Sono la retta impropria e la retta propria già nota da prima.

2.

Classificazione proiettiva:

in campo complesso (a voler essere pignoli, si dovrebbe pensare di avere immerso il piano proiettivo reale nel piano proiettivo complesso):
Γ_1 è semplicemente degenere, Γ_2 è doppiamente degenere (il supporto è costituito dai punti della retta $x_1 - x_2 - x_3 = 0$), Γ_3 è non degenere;

in campo reale:
il supporto di Γ_1 è l'unione di due rette (distinte), Γ_3 è non degenere e dotata di punti reali (su Γ_2 non c'è niente da aggiungere).

Classificazione affine:

Γ_1 è un'iperbole (degenere), Γ_3 è un'iperbole (non degenere).

Precisazione dal punto di vista euclideo:

Γ_3 è un'iperbole equilatera.

Le intersezioni, a due a due, dei supporti delle tre coniche coincidono; precisamente, si tratta dei punti $[0,-1,1]$ e $[1,1,0]$.

3.

L'unica difficoltà del disegno riguarda $\Gamma_{3,0}$. Si può procedere con il metodo del 'completamento del quadrato'. L'iperbole equilatera ha per asintoti le rette $y = x$ e $y = -x-2$ e per assi le rette $x+1=0$ e $y+1=0$.

I supporti di Γ_1, Γ_2, Γ_3 sono tutti connessi e compatti. Nessuno tra gli insiemi $\Gamma_{1,0}$, $\Gamma_{2,0}$, $\Gamma_{3,0}$ è compatto, perchè nessuno è limitato nel piano euclideo. I primi due sono connessi, il terzo no. Tutti sono completi, in quanto chiusi nel piano euclideo, che è uno spazio metrico completo.

I due gruppi di isometrie richiesti sono entrambi costituiti dall'identità, dalle simmetrie rispetto a due rette ortogonali e dalla simmetria rispetto al loro punto comune.

4.

Le due affermazioni sono entrambe false.

Per la prima, basta pensare alla simmetria rispetto ad un punto del piano: ogni retta per il centro di simmetria è nelle condizioni volute.

Per la seconda, basta pensare a una qualunque glissosimmetria.