GEOMETRIA 1 - geometria proiettiva - 23 settembre 2015

Nel piano euclideo siano (x, y) coordinate cartesiane ortogonali monometriche, e siano $[x_1, x_2, x_3]$ le corrispondenti coordinate omogenee nel piano proiettivo reale $P_2(\mathbb{R})$ (dunque $x_3 = 0$ è l'equazione della retta impropria).

Se Γ è una conica, con la notazione "Γ_0" si indicherà l'intersezione del supporto di Γ con il piano euclideo, cioè *l'insieme dei punti propri del supporto di* Γ .

1. Siano:
R_1 la simmetria (o riflessione) rispetto alla retta di equazione $y = x$,
R_2 la simmetria (o riflessione) rispetto all'asse y ,
R_3 la a simmetria (o riflessione) rispetto alla retta di equazione $x = 1$.

Si definiscano: $H_1 = R_2 \circ R_1$, $H_2 = R_3 \circ R_2 \circ R_1 = R_3 \circ H_1$, $H_3 = H_2^2 = H_2 \circ H_2$.

Si dica - giustificando le risposte - di che tipo sono le isometrie H_1 , H_2 , H_3 .

Si estenda H_2 a $P_2(\mathbb{R})$ e, in $P_2(\mathbb{R})$, se ne trovino i punti fissi. Quali rette di $P_2(\mathbb{R})$ sono (globalmente) fisse in H_2 ?

2. Si considerino poi in $P_2(\mathbb{R})$ le coniche Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 di equazioni

$\Gamma_1 :\quad g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_1x_2 = 0$;

$\Gamma_2 :\quad g_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$;

$\Gamma_3 :\quad g_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0$.

Si classifichino Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 dai punti di vista proiettivo e affine, con eventuali precisazioni dal punto di vista euclideo.

Si osservi che vale: $g_2 + g_3 = 2g_1$. Quali conseguenze ha questo fatto sulle intersezioni dei supporti delle tre coniche a due a due?

3. Si considerino ora anche $\Gamma_{1,0}$, $\Gamma_{2,0}$, $\Gamma_{3,0}$ e si illustrino con un disegno la loro posizione e le loro intersezioni.

Di ciascuno dei supporti di Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 (sottoinsiemi di $P_2(\mathbb{R})$, dotato della topologia usuale) e degli insiemi $\Gamma_{1,0}$, $\Gamma_{2,0}$, $\Gamma_{3,0}$ (sottoinsiemi del piano euclideo), si dica se è connesso e se è compatto. Di ciascuno degli ultimi tre insiemi (sottoinsiemi del piano euclideo, dotato cioè della distanza euclidea) si dica inoltre se è completo.

Si dica quali isometrie lasciano (globalmente) fisso l'insieme $\Gamma_{1,0}$ e quali isometrie lasciano (globalmente) fisso l'insieme $\Gamma_{3,0}$.

4. Nelle affermazioni che seguono, H indica un'isometria del piano euclideo, diversa dall'identità, e - per ogni punto P del piano - il termine "punto medio di $PH(P)$ " indica P , se $P = H(P)$, indica il punto medio del segmento di estremi P e $H(P)$, se $P \neq H(P)$.

Vero o falso?

1. se esiste una retta che, per ogni punto P del piano, contiene il punto medio di $PH(P)$, allora H è un'isometria inversa;

2. se esiste una retta r tale che l'insieme dei punti medi di $PH(P)$, al variare di P tra i punti del piano, coincide con l'insieme dei punti di r , allora H è la simmetria (o riflessione) rispetto alla retta r .