GEOMETRIA 1 - geometria proiettiva - 19 gennaio 2016 - soluzione

1.
$S_1 \ : \ x' = x, \qquad y' = y + 2 \ ;$
$S_2 \ : \ x' = x, \qquad y' = -2 - y \ ;$
$S_3 \ : \ x' = -y, \qquad y' = -x \ ;$
$H_1 \ : \ x' = x, \qquad y' = -4 - y \ ;$
$H_2 \ : \ x' = -y - 2, \ \ y' = -x \ ;$
$H_3 \ : \ x' = x - 2, \qquad y' = y + 2 \ .$

L'isometria H_1 è un'isometria inversa, precisamente è la simmetria rispetto alla retta $y+2 = 0$. In un caso come questo, dalla composizione di una traslazione e della simmetria rispetto ad una retta non si ottiene una glissosimmetria; ciò avviene perchè l'asse della simmetria è ortogonale alla direzione della traslazione.

L'isometria H_2 è un'isometria inversa; si vede subito che non ha punti fissi nel piano euclideo, dunque è una glissosimmetria.
Non è evidente quale retta (del piano euclideo) sia (globalmente) fissa in H_2 .
Si può ragionare in vari modi (cfr. le soluzioni del compito del 23 settembre 2015).
Conviene però osservare che, della retta fissa in H_2 , si conosce la direzione, che è la direzione dell'asse della simmetria S_3 . (L'eventuale lettore è invitato a dimostrare con cura l'affermazione.)
Si può dunque partire dall'equazione di un'arbitraria parallela alla retta $x + y = 0$, cioè $x + y + c = 0$, calcolare l'equazione della retta trasformata in H_2 (o nell'inversa), imporre la proporzionalità dei coefficienti. Si trova: $c = 1$; dunque la retta cercata ha equazione: $x + y + 1 = 0$.
Si può utilizzare la proprietà: in una glissosimmetrria, il punto medio di ogni segmento avente per estremi un punto e il suo corrispondente sta sulla retta (globalmente) fissa. Per l'osservazione iniziale, basta considerare una coppia formata da un punto e dal suo corrispondente. Per esempio, l'immagine dell'origine ha coordinate $(-2, 0)$; dunque la retta cercata è la parallela a $x + y = 0$ passante per il punto $(-1, 0)$.
Si può prescindere dall'osservazione iniziale e procedere con i metodi della geometria proiettiva (v. oltre).

L'isometria H_3 è un'isometria diretta ed è evidentemente una traslazione. D'altra parte, è sempre vero che il quadrato di una glissosimmetria è una traslazione. Chiaramente, la direzione della traslazione è quella della retta $x + y = 0$.

L'estensione di H_2 a $P_2(\mathbb{R})$ si effettua con il solito metodo e non presenta difficoltà.
I punti fissi si trovano con la consueta ricerca degli autovalori e degli autovettori. Sono i punti impropri delle bisettrici dei quadranti.
A partire dalla matrice trasposta, la ricerca degli autovettori (gli autovalori ovviamente coincidono) permette di trovare le rette fisse (in $P_2(\mathbb{R})$). Sono la retta impropria e la retta propria già nota da prima.
Hanno gli stessi punti fissi in $P_2(\mathbb{R})$ le estensioni di S_1 e di H_3 .
Hanno la stessa restrizione alla retta impropria le estensioni di S_1 e di H_3 , le estensioni di S_2 e di H_1 , le estensioni di S_3 e di H_2 .

2.
Classificazione proiettiva:

in campo complesso (a voler essere pignoli, si dovrebbe pensare di avere immerso il piano proiettivo reale nel piano proiettivo complesso):
Γ_1 , Γ_2 e Γ_4 sono semplicemente degeneri, Γ_3 è non degenere;

in campo reale:
i supporti di Γ_1 e di Γ_2 sono l'unione di due rette (distinte), Γ_3 è non degenere e dotata di punti reali, il supporto di Γ_4 è costituito da un unico punto (se si pensa di avere immerso il piano proiettivo reale nel piano proiettivo complesso e di mantenere la distinzione tra i punti reali e i punti non reali, si può dire che il supporto è l'unione di due rette complesse coniugate).

Classificazione affine:

Γ_1 e Γ_2 sono iperboli (degeneri), Γ_3 è un'ellisse (non degenere), Γ_4 è un'ellisse (degenere).

Precisazioni dal punto di vista euclideo:

Γ_1 e Γ_2 sono iperboli equilatere (degeneri), cioè i loro supporti sono unione di due rette ortogonali; Γ_3 è una circonferenza.

3.
L'unica difficoltà del disegno riguarda $\Gamma_{3,0}$, che è tangente ad entrambe le rette che compongono $\Gamma_{1,0}$. L'unico punto di $\Gamma_{4,0}$ è il centro della circonferenza.

I supporti di Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 e Γ_4 sono tutti connessi e compatti. Gli insiemi $\Gamma_{1,0}$ e $\Gamma_{2,0}$ non sono compatti, perchè non sono limitati nel piano euclideo; $\Gamma_{3,0}$ e $\Gamma_{4,0}$ sono compatti. Tutti sono connessi. Tutti sono completi, in quanto chiusi nel piano euclideo, che è uno spazio metrico completo.

Le isometrie che lasciano fisso $\Gamma_{3,0} \cup \Gamma_{4,0}$ sono le rotazioni attorno a $(0, -2)$ (identità inclusa) e le simmetrie rispetto alle rette passanti per $(0, -2)$.

Le isometrie che lasciano fisso $\Gamma_{1,0} \cup \Gamma_{3,0}$ sono l'identità e la simmetria rispetto all'asse y .

4.
Le due affermazioni sono entrambe false.

Per la prima, basta pensare a una qualunque omotetia (che non sia un'isometria). I punti impropri sono tutti fissi.
E' però vero che H_2 è necessariamente una similitudine, perchè - nell'estensione al piano proiettivo complesso - i punti ciclici sono fissi. (Ciò comunque non rientra nel programma del corso.)

Per la seconda, basta pensare a una trasformazione affine come la seguente:
$x' = x, \qquad y' = 2y$,
nella quale l'asse x è retta di punti fissi.