GEOMETRIA 1 - geometria proiettiva - 16 giugno 2015

Nel piano euclideo siano (x, y) coordinate cartesiane ortogonali monometriche, e siano $[x_1, x_2, x_3]$ le corrispondenti coordinate omogenee nel piano proiettivo reale $P_2(I\!R)$ (dunque $x_3 = 0$ è l'equazione della retta impropria).

Se Γ è una conica, con la notazione "Γ_0" si indicherà l'intersezione del supporto di Γ con il piano euclideo, cioè *l'insieme dei punti propri del supporto di* Γ .

1. Siano:

R_1 la simmetria rispetto al punto $(1, 1)$, R_2 la simmetria rispetto al punto $(2, 2)$, $T = R_1 \circ R_2$.

Si dica - giustificando la risposta - di che tipo è l'isometria T .

Si estenda R_1 a $P_2(I\!R)$ e, in $P_2(I\!R)$, se ne trovino i punti fissi. Quali rette di $P_2(I\!R)$ sono (globalmente) fisse in R_1 ?

Si consideri poi la trasformazione S rappresentata nel modo seguente:

$$S: \quad x' = 2 - 2x \ , \quad y' = 2 - 2y \ .$$

Si dica - giustificando la risposta - che tipo di trasformazione è S .

Si estenda S a $P_2(I\!R)$ e, in $P_2(I\!R)$, se ne trovino i punti fissi.

Si trovi infine $G = R_1 \circ S$.

Che cosa si può dire sulla trasformazione G ?

2. Si considerino poi in $P_2(I\!R)$ le coniche Γ_1 e Γ_2 di equazioni

$\Gamma_1 : \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0$;

$\Gamma_2 : \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0$.

Si classifichino Γ_1 e Γ_2 dai punti di vista proiettivo e affine.

Si trovi l'intersezione dei supporti delle due coniche.

3. Si considerino ora anche $\Gamma_{1,0}$, $\Gamma_{2,0}$ e si illustrino con un disegno la loro posizione e le loro intersezioni.

Di ciascuno degli insiemi: supporto di Γ_1 , supporto di Γ_2 (sottospazi di $P_2(I\!R)$, dotato della topologia usuale), $\Gamma_{1,0}$, $\Gamma_{2,0}$, $\Gamma_{1,0} \cap \Gamma_{2,0}$ (sottospazi del piano euclideo), si dica se è connesso e se è compatto.

Considerati gli insiemi: $\Gamma_{1,0}$, $\Gamma_{2,0}$, $\Gamma_{1,0} \cup \Gamma_{2,0}$ (sottospazi del piano euclideo), si dica - giustificando la risposta - se tra di loro ve ne sono di omeomorfi o di equivalenti dal punto di vista affine.

4. Vero o falso?

1. Se, nell'estensione di una trasformazione affine H a una proiettività di $P_2(I\!R)$, tutti i punti impropri sono fissi, allora H è un'isometria.

2. Se, nell'estensione di una trasformazione affine H a una proiettività di $P_2(I\!R)$, tutti i punti impropri sono fissi, allora H è una similitudine.