GEOMETRIA 1 - **geometria proiettiva** - primo luglio 2015

Nel piano euclideo siano (x, y) coordinate cartesiane ortogonali monometriche, e siano $[x_1, x_2, x_3]$ le corrispondenti coordinate omogenee nel piano proiettivo reale $P_2(\mathbb{R})$ (dunque $x_3 = 0$ è l'equazione della retta impropria).
Se Γ è una conica, con la notazione "Γ_0" si indicherà l'intersezione del supporto di Γ con il piano euclideo, cioè *l'insieme dei punti propri del supporto di* Γ .

1. Siano:
R_1 la simmetria (o riflessione) rispetto alla retta $x - y = 0$, R_2 la simmetria (o riflessione) rispetto alla retta $x + y = 0$, $R = R_1 \circ R_2$.
Si dica - giustificando la risposta - di che tipo è l'isometria R .
Si consideri poi la trasformazione S rappresentata nel modo seguente:

$$S : \quad x' = x \ , \quad y' = 6 - y \ .$$

Si dica - giustificando la risposta - che tipo di trasformazione è S .
Si estenda S a $P_2(\mathbb{R})$ e, in $P_2(\mathbb{R})$, se ne trovino i punti fissi. Quali rette di $P_2(\mathbb{R})$ sono (globalmente) fisse in S ?
Si dica se, tra le proiettività di $P_2(\mathbb{R})$ che hanno gli stessi punti fissi di S , esistono:
similitudini che non siano isometrie;
trasformazioni affini che non siano similitudini;
proiettività che non siano trasformazioni affini.

Si trovi infine $G = S \circ R$.
Che cosa si può dire sulla trasformazione G ?

2. Si considerino poi in $P_2(\mathbb{R})$ le coniche Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 di equazioni

$\Gamma_1 : \quad x_1^2 - x_2^2 + 2x_2x_3 = 0 ;$

$\Gamma_2 : \quad x_1^2 + x_2^2 + 8x_3^2 - 6x_2x_3 = 0 ;$

$\Gamma_3 : \quad x_2^2 + 8x_3^2 - 6x_2x_3 = 0 .$

Si classifichino Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 dai punti di vista proiettivo e affine, con eventuali precisazioni dal punto di vista euclideo.
Si trovino le intersezioni dei supporti delle tre coniche, a due a due.

3. Si considerino ora anche $\Gamma_{1,0}$, $\Gamma_{2,0}$ e $\Gamma_{3,0}$ e si illustrino con un disegno la loro posizione e le loro intersezioni.
Di ciascuno degli insiemi: $\Gamma_{1,0}$, $\Gamma_{2,0}$, $\Gamma_{3,0}$ (sottospazi del piano euclideo), si dica se è connesso e se è compatto.
Considerati gli insiemi: $\Gamma_{1,0}$, $\Gamma_{3,0}$, $\Gamma_{1,0} \cup \Gamma_{3,0}$, $\Gamma_{2,0} \cup \Gamma_{3,0}$ (sottospazi del piano euclideo), si dica - giustificando la risposta - se tra di loro ve ne sono di omeomorfi o di equivalenti dal punto di vista affine.

4. Vero o falso?
1. Date due distinte coniche reali non degeneri, se i loro supporti hanno un punto reale in comune e in quel punto hanno la stessa retta tangente, non possono avere altri punti reali in comune.
2. Date due distinte coniche reali, i loro supporti non possono avere infiniti punti reali comuni.