agosto 1997

Piccola introduzione alla geometria proiettiva

M.D.T. Cornalba

Dipartimento di Matematica, Università di Pavia

Prerequisiti e bibliografia minima.

Il prerequisito essenziale per la comprensione di queste note è una buona dimestichezza con i rudimenti dell'algebra lineare e dell'uso di questa per trattare questioni di geometria analitica riguardanti rette, piani ed altri enti lineari. Potrebbe essere utile avere familiarità con la nozione astratta di campo e con quella di gruppo.

Vi sono sostanzialmente due modi di porsi di fronte alla geometria proiettiva. Il primo è quello di basare la costruzione degli spazi proiettivi e delle applicazioni tra di essi sull'algebra lineare; come la lista dei prerequisiti fa intuire, questo è l'atteggiamento prevalente in queste note. Il secondo modo è quello di costruire la geometria proiettiva a partire da opportuni assiomi di incidenza; questo è il punto di vista adottato nelle ultime due sezioni.

Due classici della geometria proiettiva in lingua italiana sono:

1. F. Enriques, *Lezioni di geometria proiettiva*, seconda edizione, Zanichelli, Bologna, 1904.
2. A. Comessatti, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva, parte seconda*, seconda edizione, CEDAM, Padova, 1942.

Tra i libri più recenti si possono segnalare:

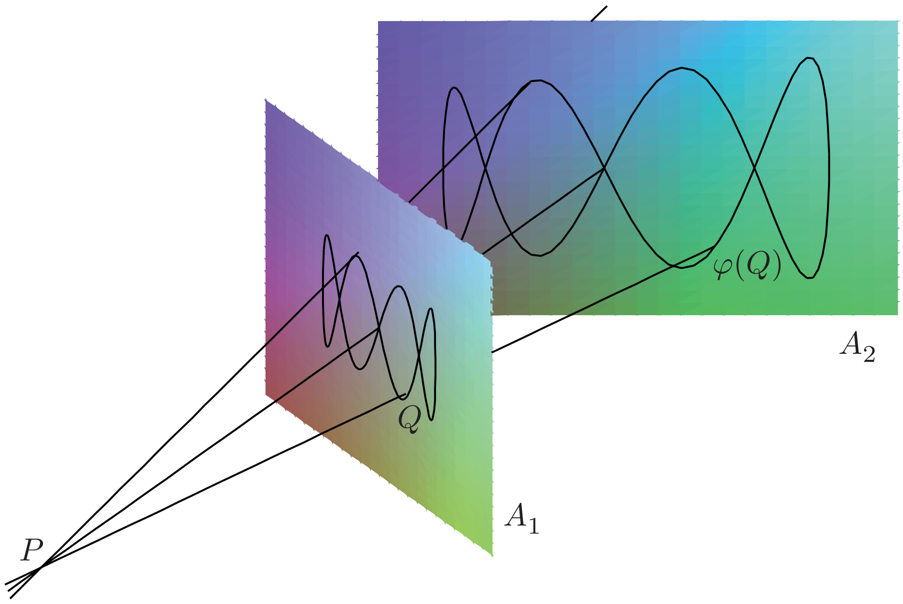
3. A. Seidenberg, *Lectures in projective geometry*, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1962.
4. R. Hartshorne, *Foundations of projective geometry*, Benjamin, New York, 1967.
5. P. Samuel, *Projective geometry*, Springer-Verlag, New York, 1988.

I primi due hanno una impostazione prevalentemente assiomatica, il terzo è più vicino al nostro punto di vista.

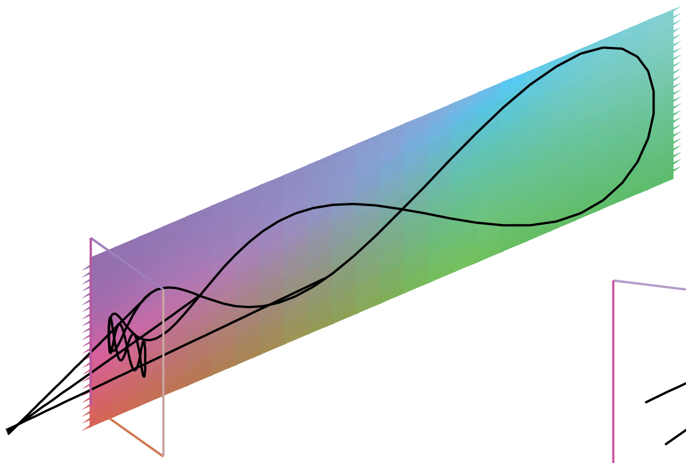
1 Introduzione.

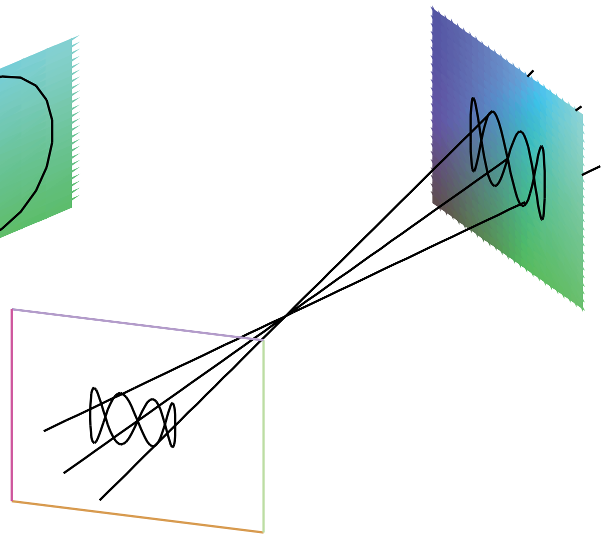
Proiettiamo una diapositiva su una parete. Supporremo sia la parete che la diapositiva perfettamente piane. Idealizziamo il processo immaginando che, diversamente da quanto succede in realtà, esso avvenga illuminando la diapositiva con una sorgente luminosa puntiforme, e che l'immagine sia riportata sulla parete di proiezione per semplice trasparenza.

Geometricamente, quello che accade è molto semplice da descrivere. È fissato un punto P (il punto in cui si trova la sorgente luminosa), esterno sia al piano della parete sia al piano su cui giace la diapositiva. Ogni punto Q della diapositiva viene proiettato sul punto del piano della parete che si ottiene intersecando questo piano con la retta per P e per Q. Astrattamente, ciò che accade è quanto segue. Sono dati, nello spazio ordinario, un punto P e due piani A_1 e A_2 non contenenti P. Si definisce una “applicazione” φ da A_1 ad A_2 definendo $\varphi(Q)$ come il punto di intersezione della retta passante per P e Q con A_2. Le virgolette intorno alla parola “applicazione” sono dovute al fatto che, se i piani A_1 e A_2 non sono paralleli, $\varphi(Q)$ non è definito per tutti i Q, e precisamente non è definito per i Q che appartengono alla intersezione di A_1 col piano per P parallelo ad A_2.



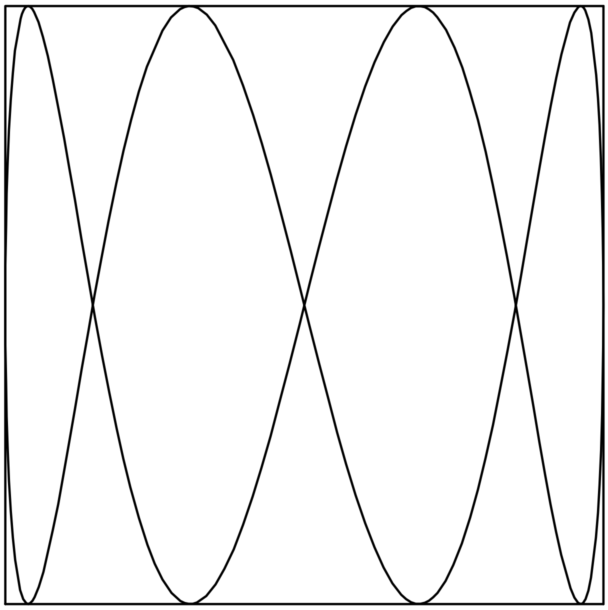
Altri esempi:



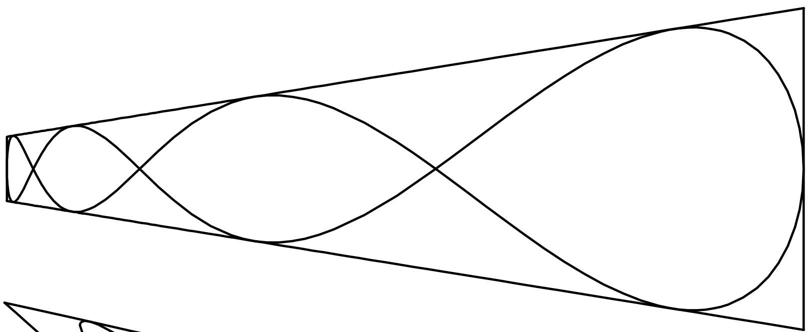


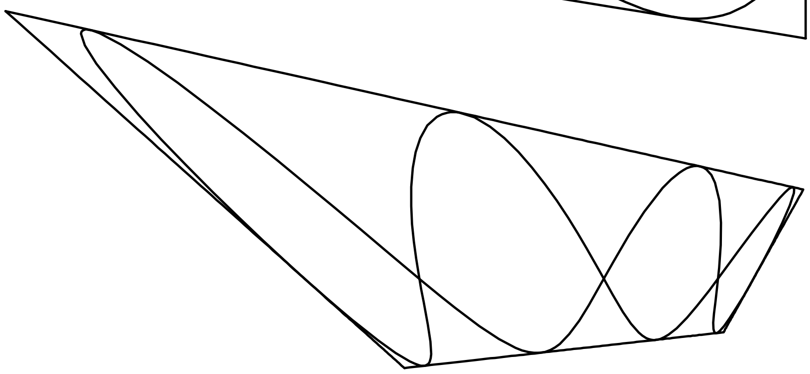
Esercizio (1.1). Dare una idealizzazione del processo di proiezione di una diapositiva che sia più aderente alla realtà di quello descritto all'inizio di questa sezione. Osservare che in ogni caso la descrizione geometrica di quanto accade è identica a quella appena data.

Torniamo alla diapositiva. Se il piano di proiezione non è parallelo a quello della diapositiva, l'immagine proiettata sarà una versione distorta di quella originale, ma spesso ancora riconoscibile perchè ne mantiene alcune caratteristiche essenziali. In particolare l'immagine di un tratto di retta è ancora un tratto di retta. Qui sotto sono raffigurate una figura piana

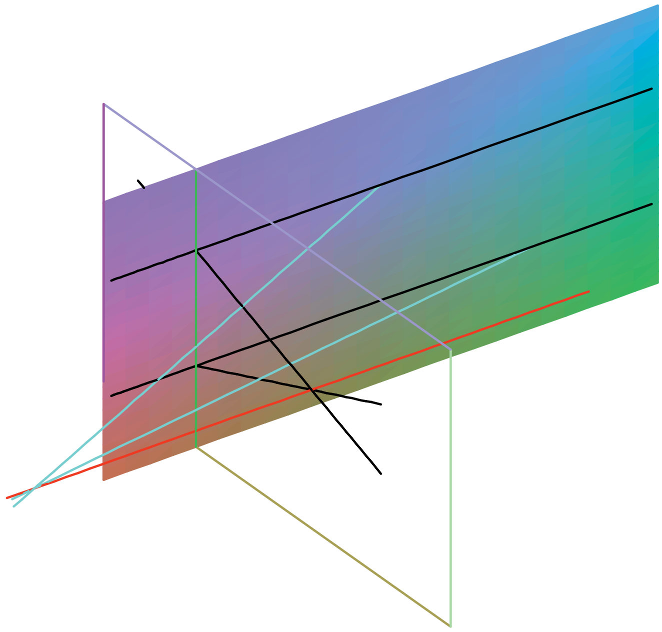


e le sue trasformate tramite due diverse prospettività.



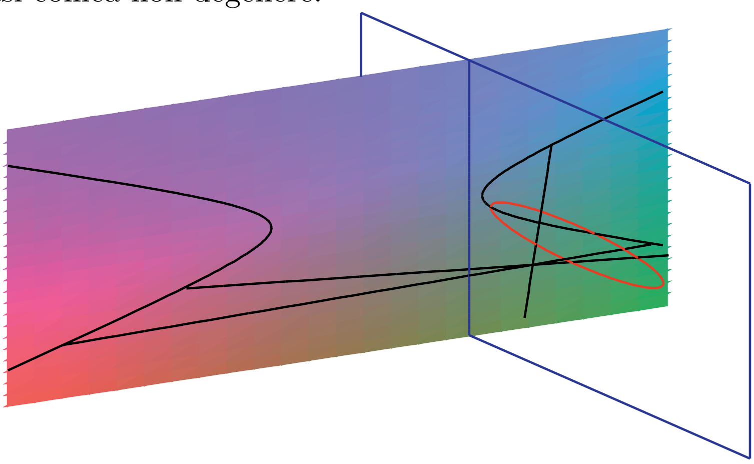


Astrattamente, l'immagine di una retta r giacente su A_1 è la retta ottenuta intersecando A_2 con il piano passante per P ed r (con le eccezioni dovute, per ora, al fatto che φ non è definita su tutto A_1). È invece evidente che nella proiezione non vengono conservati gli angoli o il parallelismo fra rette. Nella figura qui sotto due rette incidenti vengono trasformate da una prospettività in rette parallele (Esercizio: in generale, quando accade ciò?).



L'applicazione φ è quello che si chiama una prospettività tra i piani A_1 e A_2. Desideriamo considerare equivalenti figure giacenti su due piani che siano ottenibili l'una dall'altra con una prospettività; in altre parole desideriamo fare astrazione da tutte quelle proprietà che non si conservano per prospettività. Poiché abbiamo usato la parola "equivalenti" sarebbe meglio che quella ora introdotta fosse in effetti una relazione di equivalenza. Purtroppo non è così, perchè, come vedremo (cf. (2.3)), la composizione di due prospettività non è necessariamente una prospettività. La cosa corretta da fare è quindi considerare equivalenti due figure, ognuna delle quali giaccia in un piano, se una può essere ottenuta dall'altra tramite una catena finita di prospettività o, come si suole dire, attraverso una proiettività.

Osserviamo che la "riconoscibilità" di una figura piana dopo che le sia stata applicata una prospettività, o più in generale una proiettività, non è una regola generale. La figura qui sotto mostra una prospettività che trasforma una ellisse in una iperbole. Più in generale, variando ad esempio il piano sul quale avviene la proiezione, si potrebbe ottenere dall'ellisse qualsiasi conica non degenere.



Come si è accennato, la geometria proiettiva piana si occupa delle proprietà delle figure piane che si conservano per proiettività. Il passo essenziale per determinare quali esse siano è comprendere quale sia la struttura delle proiettività; a un primo studio di queste ultime, in dimensione arbitraria, è dedicata la maggior parte di queste note.

2 Le prospettività in ambiente affine.

Sia E lo spazio ordinario. La scelta di una "origine" $0 \in E$ dà ad E una struttura di spazio vettoriale tridimensionale su $\mathbb{R}$; questa scelta non avrà effetti sostanziali su quanto diremo. Tutte le considerazioni che svolgeremo in questa sezione valgono più in generale, al più con minime modifiche terminologiche, quando si prenda per E uno spazio vettoriale di dimensione finita qualsiasi su un campo K. Per aiutare l'intuizione geometrica ci soffermeremo però essenzialmente sul caso in cui E sia, appunto, lo spazio ordinario nel quale sia stata scelta, una volta per tutte, una origine.

Sia P un punto di E e sia Π un piano (o, in dimensione qualsiasi, un iperpiano affine, cioè non necessariamente passante per l'origine) non contenente P. Sia $\varphi(X) = d$ una equazione per Π, dove φ è una forma lineare non nulla e d è una costante. Se Q è un punto di E, indichiamo con $\alpha(Q)$ la proiezione di Q da P su Π, cioè il punto di intersezione di Π con la retta per P e Q. Naturalmente questo ha senso solo se Q non appartiene al piano Π' parallelo a Π e passante per P. Dunque α è una applicazione da $E - \Pi'$ a Π; desideriamo descriverla in forma analitica. Possiamo scrivere

$$\alpha(Q) = tP + (1-t)Q\,,$$

con t da determinarsi. Per trovare t dobbiamo imporre che $\alpha(Q)$ giaccia su Π, e cioè scrivere

$$d = \varphi(\alpha(Q)) = t\varphi(P) + (1-t)\varphi(Q) = \varphi(Q) + t\varphi(P-Q)\,.$$

Se ne ricava

$$t = \frac{d-\varphi(Q)}{\varphi(P-Q)}\,, \quad 1-t = \frac{d-\varphi(P)}{\varphi(Q-P)}\,.$$

In definitiva si può scrivere

$$\alpha(Q) = \frac{d-\varphi(Q)}{\varphi(P-Q)}P + \frac{d-\varphi(P)}{\varphi(Q-P)}Q = P + \frac{d-\varphi(P)}{\varphi(Q-P)}(Q-P)\,, \tag{2.1}$$

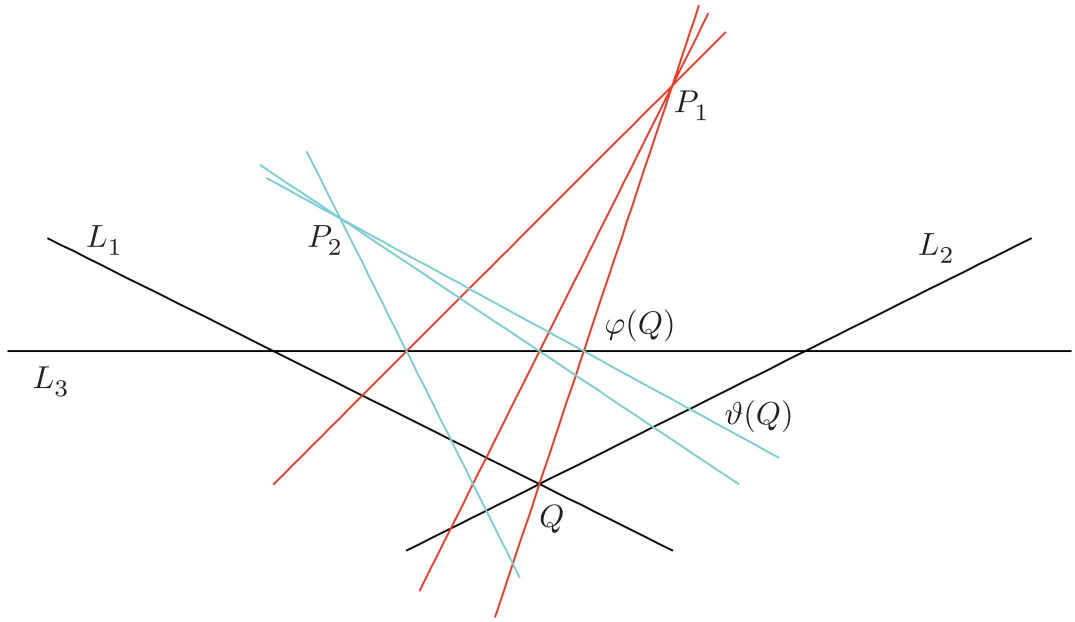
o anche, ponendo $v = Q - P$,

$$\alpha(Q) = P + \frac{d-\varphi(P)}{\varphi(v)}v\,. \tag{2.2}$$

Sia ora Λ un altro piano (o, in generale, un altro iperpiano) non contenente P. La *prospettività* di centro P da Λ a Π, che indicheremo con β, non è altro che la restrizione di α a Λ, o meglio, se vogliamo essere pedanti, a $\Lambda - \Lambda \cap \Pi'$.

È immediato osservare che $\beta(Q) = Q$ se Q appartiene all'intersezione di Λ con Π. Vedremo più avanti (cf. (4.5)) che in effetti questa proprietà caratterizza le prospettività tra tutte le proiettività.

Esempio (2.3) (Una composizione di prospettività che non è una prospettività). Questo è un esempio di composizione di prospettività tra rette nel piano. Non è difficile dare esempi in qualsiasi dimensione; questo viene lasciato come esercizio al lettore.



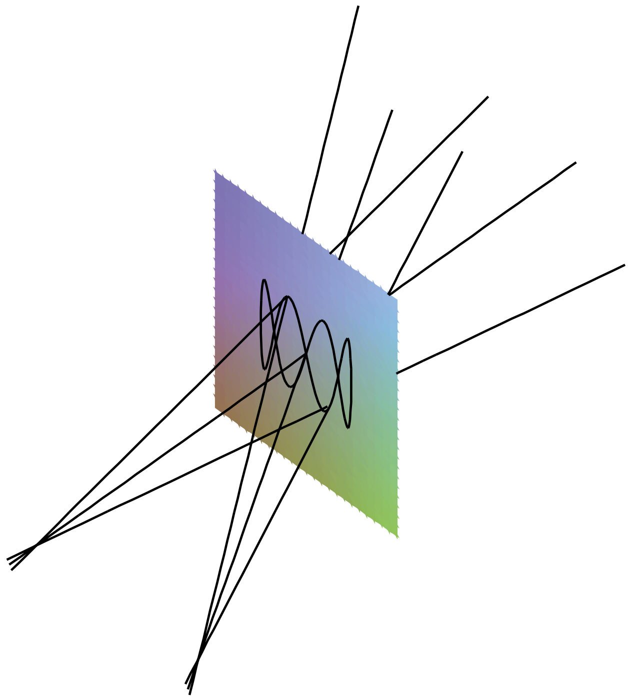
Indichiamo con φ la prospettività da L_1 a L_3 di centro P_1, con ψ la prospettività da L_3 a L_2 di centro P_2, e con ϑ la prospettività ottenuta componendo φ e ψ. Se Q è il punto di intersezione di L_1 e L_2, è chiaro dalla figura che $\vartheta(Q) \neq Q$.

Abbiamo osservato che in generale una prospettività tra piani non è definita ovunque, ma solo sul complementare di una retta. La situazione sembra anche peggiore per le proiettività, cioè per le composizioni di più prospettività. In altre parole, se $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sono prospettività e $L_1 \dots L_k$ sono le rette dove esse non sono definite, sembra che la composizione $\alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_k$ non sia definita sull'unione di rette

$$L_k \cup \alpha_k^{-1}(L_{k-1}) \cup \alpha_k^{-1}\alpha_{k-1}^{-1}(L_{k-2}) \cup \cdots \cup \alpha_k^{-1} \dots \alpha_2^{-1}(L_1)\,.$$

In realtà si può mostrare che vi è sempre una estensione naturale di $\alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_k$ che è definita sul complementare di una retta. Sarebbe in ogni caso conveniente che le prospettività e le proiettività fossero definite ovunque, senza eccezioni. Per rendere questo possibile è necessario ampliare i piani dello spazio ordinario, o più in generale gli iperpiani in uno spazio di dimensione qualsiasi, "aggiungendo" loro altri punti. Vediamo quale può essere una soluzione.

Sia P un punto di E. La *stella* di centro P, che indicheremo con Σ_P, è l'insieme di tutte le rette passanti per P. Sia ora Π un piano in E (o, in dimensione qualsiasi, un iperpiano); supponiamo che non contenga P. Vi è una applicazione naturale da Π a Σ_P, che associa ad ogni punto x di Π la retta per P e x. Si tratta ovviamente di una applicazione iniettiva, mentre i soli elementi di Σ_P che non appartengono alla sua immagine sono le rette parallele a Π. A sua volta, Σ_P può essere identificata alla stella Σ centrata nell'origine, associando ad ogni retta per P l'unica retta per l'origine ad essa parallela. Si ottiene dunque una inclusione $j_{P,\Pi} : \Pi \hookrightarrow \Sigma$. L'idea è quella di identificare Π alla sua immagine in Σ e di usare Σ come ampliamento di Π. Nel fare ciò si compie una scelta arbitraria, e cioè quella del punto P; vediamo innanzitutto cosa cambia se si sceglie una stella centrata in un altro punto Q, anch'esso naturalmente non appartenente a Π.



Sia $\varphi(X) = d$ l'equazione di Π, dove φ è un funzionale lineare e d una costante. Per ogni vettore non nullo $v \in E$ indichiamo con $[v]$ il sottospazio vettoriale da esso generato; in altre parole, $[v]$ è la retta passante per l'origine e per v. Sia ora v un vettore non parallelo a Π; si può scrivere $[v] = j_{P,\Pi}(x)$, dove x è il punto di intersezione di Π con la retta passante per P e per $P + v$. Dunque x è della forma $P + tv$, dove la costante t è determinata da $\varphi(P + tv) = d$. Quindi

$$t = \frac{d - \varphi(P)}{\varphi(v)}\,, \qquad x = P + \frac{d - \varphi(P)}{\varphi(v)} v\,,$$

o anche

$$\begin{aligned} x &= Q + P - Q + \frac{d - \varphi(P)}{\varphi(v)} v \\ &= Q + \frac{d - \varphi(P)}{\varphi(v)} \left(v + \frac{\varphi(v)}{d - \varphi(P)} (P - Q) \right). \end{aligned}$$

In altre parole,

$$j_{Q,\Pi}(x) = \beta(j_{P,\Pi}(x))\,, \qquad \beta[v] = [\alpha(v)]\,, \tag{2.4}$$

dove α è l'applicazione lineare di E in sè data da

$$\alpha(v) = v + \frac{\varphi(v)}{d - \varphi(P)}(P - Q)\,.$$

Notiamo che α è invertibile. Questo è ovvio se $P = Q$, nel qual caso α è l'identità. Altrimenti, se $\alpha(v) = 0$, allora v è della forma $k(P - Q)$ per qualche costante k, e dunque

$$0 = k + k\frac{\varphi(P - Q)}{d - \varphi(P)}.$$

Ne segue che $k = 0$, e quindi che $v = 0$, come si voleva, oppure che $\varphi(Q) = d$, cioè che $Q \in \Pi$, contro quanto si è supposto.

Va anche osservato che $\alpha(v) = v$ per ogni v parallelo a Π, tale cioè che $\varphi(v) = 0$, o ancora, se $v \neq 0$, tale che $[v]$ non appartenga all'immagine di $j_{P,\Pi}$ (o di $j_{Q,\Pi}$).

Vediamo ora che la costruzione che abbiamo descritta risolve il problema che ci eravamo posti, cioè quello di trovare degli ampliamenti dei piani sui quali le prospettività potessero essere estese in modo da essere definite ovunque, senza eccezioni. Siano dunque Π e Λ due piani (o, in dimensione qualsiasi, due iperpiani), e sia P un punto a loro esterno; indichiamo con ξ la prospettività di centro P da Π a Λ. Siano poi Q ed R due punti, il primo non contenuto in Π, il secondo non contenuto in Λ. Ad essi corrispondono inclusioni $j_{Q,\Pi} : \Pi \hookrightarrow \Sigma$ e $j_{R,\Lambda} : \Lambda \hookrightarrow \Sigma$. Vogliamo mostrare che ξ si estende in modo naturale ad una applicazione biunivoca χ di Σ in sè, cioè che $\chi(j_{Q,\Pi}(x)) = j_{R,\Lambda}(\xi(x))$ ogni volta che $\xi(x)$ è definito. Questo è immediato nel caso particolare in cui $Q = R = P$, nel quale χ è l'applicazione identità. In generale, ci si può ridurre a questo caso particolare usando le formule (2.4). Infatti queste danno

$$j_{R,\Lambda}(\xi(x)) = \gamma(j_{P,\Lambda}(\xi(x))) = \gamma(j_{P,\Pi}(x)) = \gamma(\eta(j_{Q,\Pi}(x)))\,,$$

dove

$$\gamma[v] = [\delta(v)]\,, \qquad \eta[v] = [\vartheta(v)]\,,$$

e δ e ϑ sono applicazioni lineari invertibili di E in sè. In definitiva si può porre

$$\chi[v] = [\delta(\vartheta(v))]\,.$$

Dunque una prospettività tra piani (o, in dimensione qualsiasi, tra iperpiani), estesa a una applicazione di Σ in sè, viene da una applicazione lineare invertibile di E in sè. Lo stesso si può dire delle proiettività, in quanto composizioni di prospettività.

Sia ora L una retta nel piano Π, e sia P un punto esterno a Π. Sia V il piano per l'origine di E parallelo a quello passante per L e per P. Indichiamo con $\mathcal{L}$ l'insieme di tutte le rette per l'origine di E contenute in V. L'intersezione di $\mathcal{L}$ con $j_{P,\Pi}(\Pi)$ è esattamente la (o meglio, l'immagine della) retta L. In questo modo si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra rette in Π e piani per l'origine di E che non siano paralleli a Π. Per analogia si può chiamare "retta" anche il piano per l'origine parallelo a Π, o meglio l'insieme dei punti di Σ ad esso corrispondente. Si tratta dell'insieme delle rette per l'origine di E parallele a Π; è quella che si usa chiamare "retta all'infinito" di Π.

3 Gli spazi proiettivi.

Sia K un campo e sia V uno spazio vettoriale su K. Lo *spazio proiettivo* costruito su V, che indicheremo con $\mathbb{P}V$, è l'insieme dei sottospazi vettoriali unidimensionali di V, cioè l'insieme delle rette per l'origine in V. La *dimensione* di $\mathbb{P}V$ è definita come

$$\dim \mathbb{P}V = \dim V - 1\,.$$

D'ora in poi, salvo avviso, tutti gli spazi vettoriali, e quindi tutti gli spazi proiettivi, che considereremo saranno implicitamente supposti di dimensione finita; chiameremo anche semplicemente "iperpiani in V" i sottospazi vettoriali di V di dimensione $\dim V - 1$, e "iperpiani affini" i loro traslati. Se v è un elemento non nullo di V, indicheremo con $[v]$ il sottospazio da esso generato. I *sottospazi proiettivi* (o *lineari*) di $\mathbb{P}V$ sono i sottinsiemi della forma $\mathbb{P}W$, dove W è un sottospazio vettoriale di V. Le *rette* in $\mathbb{P}V$ sono i sottospazi di dimensione 1, cioè quelli della forma $\mathbb{P}W$, dove W ha dimensione 2. Gli *iperpiani* in $\mathbb{P}V$ sono i sottospazi di dimensione $\dim \mathbb{P}V - 1$, cioè quelli della forma $\mathbb{P}W$, dove W è un iperpiano in V. Se S e T sono sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}V$, anche $S \cap T$ è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}V$. Possiamo infatti scrivere $S = \mathbb{P}U$, $T = \mathbb{P}W$, e allora $S \cap T = \mathbb{P}U \cap \mathbb{P}W = \mathbb{P}(U \cap W)$.

Sia Π un iperpiano affine in V, e sia H l'iperpiano per l'origine parallelo a Π. Supponiamo che Π non passi per l'origine; l'applicazione $\Pi \to \mathbb{P}V - \mathbb{P}H$ definita da $v \mapsto [v]$ è biunivoca. Questa applicazione fa corrispondere sottospazi affini di Π a sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}V$ della stessa dimensione: in particolare, rette a rette e iperpiani ad iperpiani. L'iperpiano $\mathbb{P}H$ viene a volte chiamato *iperpiano all'infinito* di $\mathbb{P}V$; va sottolineato che esso dipende in modo essenziale dalla scelta di H.

Lemma (3.1) (Formula di Grassmann). *Siano S e T sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}V$. Se $\dim S + \dim T \geq \dim \mathbb{P}V$, allora $S \cap T \neq \emptyset$; inoltre $\dim(S \cap T) \geq \dim S + \dim T - \dim \mathbb{P}V$.*

La formula di Grassmann, nella sua versione proiettiva, è una semplice conseguenza della formula di algebra lineare che va sotto lo stesso nome. Scriviamo $S = \mathbb{P}U$, $T = \mathbb{P}W$, dove U e W sono sottospazi vettoriali di V. È noto che

$$\dim V \geq \dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)\,.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \dim(U \cap W) &\geq \dim U + \dim W - \dim V \\ &= \dim S + 1 + \dim T + 1 - \dim \mathbb{P}V - 1 \\ &= \dim S + \dim T - \dim \mathbb{P}V + 1\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Se $\dim S + \dim T \geq \dim \mathbb{P}V$, questo dice che $U \cap W$ ha dimensione almeno 1, e quindi contiene almeno una retta. Ciò significa che $S \cap T = \mathbb{P}(U \cap W)$ contiene almeno un punto. Dalla (3.2) discende anche che

$$\dim(S \cap T) \geq \dim S + \dim T - \dim \mathbb{P}V\,.$$

Osservazione (3.3). Storicamente, la versione proiettiva della formula di Grassmann precedette la sua interpretazione nel contesto dell'algebra lineare. Quello che si è fatto qui, e che si farà nel resto di queste note, è stato ribaltare la storia, facendo discendere la geometria proiettiva dall'algebra lineare, e non viceversa.

Una conseguenza immediata della formula di Grassmann è che, in uno spazio proiettivo di dimensione 2, o, come si suol dire, in un *piano proiettivo*, due rette si incontrano sempre (in un solo punto, a meno che non siano coincidenti). Più in generale, una retta e un iperpiano in uno spazio proiettivo di dimensione qualsiasi si incontrano sempre (in un punto solo, a meno che la retta non sia contenuta nell'iperpiano). In geometria proiettiva non vi è dunque una nozione di parallelismo. Molte delle proprietà che valgono in geometria euclidea continuano invece ad essere valide in ambito proiettivo. Ad esempio, per due punti distinti passa una e una sola retta. Se $[x], [y] \in \mathbb{P}V$ sono i due punti in questione, dire che sono distinti equivale infatti a dire che i vettori x e y sono indipendenti, e quindi che il sottospazio vettoriale H da essi generato ha dimensione 2; la sola retta che contiene sia $[x]$ che $[y]$ è allora $\mathbb{P}H$. Torneremo in modo più sistematico su questo tipo di considerazioni nella sezione 5.

4 Le proiettività.

Siano $\mathbb{P}U$ e $\mathbb{P}W$ due spazi proiettivi su uno stesso campo K. Una *proiettività* tra $\mathbb{P}U$ e $\mathbb{P}W$ è una applicazione $\alpha : \mathbb{P}U \to \mathbb{P}W$ della forma

$$\alpha[v] = [\beta(v)]\,, \tag{4.1}$$

dove $\beta : U \to W$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Sia ora V uno spazio vettoriale e siano U e W due iperpiani in V. Sia $[x]$ un punto di $\mathbb{P}V$ esterno sia a $\mathbb{P}U$ che a $\mathbb{P}W$. La *prospettività* di centro $[x]$ da $\mathbb{P}U$ a $\mathbb{P}W$ è l'applicazione $\psi : \mathbb{P}U \to \mathbb{P}W$ così definita: $\psi(Q)$ è il punto di intersezione tra $\mathbb{P}W$ e la retta passante per $[x]$ e Q. Osserviamo che questa definizione coincide con quella informale data nell'introduzione, mentre la definizione di proiettività data in quell'occasione non sembra avere parentele con quella data poco sopra. Vedremo più avanti (cf. (4.7)) che questa discrepanza è solo apparente, e cioè che le proiettività tra iperpiani in uno spazio proiettivo sono in effetti tutte e sole le composizioni di prospettività. Notiamo anche che la definizione di $\psi(Q)$ si estende senza mutamenti a tutti i $Q \in \mathbb{P}V$ distinti da $[x]$

Cominciamo col mostrare che le prospettività sono proiettività. Siano dunque V, U, W, $[x]$ e ψ come sopra. Se $[v]$ è un punto di $\mathbb{P}V$ distinto da $[x]$, e indichiamo con H il sottospazio di V generato da x e v, il sottospazio $H \cap W$ contiene un solo vettore della forma $v + ax$. Più esattamente, se W è definito dall'annullarsi del funzionale lineare φ, deve essere $0 = \varphi(v + ax) = \varphi(v) + a\varphi(x)$, e quindi $a = -\varphi(v)/\varphi(x)$. Dunque si ha che

$$\psi[v] = [\Psi(v)]\,, \tag{4.2}$$

dove Ψ è l'applicazione lineare di V in sè data da

$$\Psi(v) = v - \frac{\varphi(v)}{\varphi(x)}x\,. \tag{4.3}$$

Notiamo che Ψ è caratterizzata, tra le applicazioni lineari di V in sè, dalle proprietà di avere nucleo generato da x e di avere come restrizione a W l'applicazione identità. Notiamo anche che Ψ induce, per restrizione a U, un isomorfismo di questo spazio vettoriale su W; unito a (4.2), ciò dice che ψ è una proiettività da $\mathbb{P}U$ a $\mathbb{P}W$.

Ci si può chiedere, data una proiettività $\alpha : \mathbb{P}U \to \mathbb{P}W$, quanta arbitrarietà vi sia nella scelta di un isomorfismo $\beta : U \to W$ tale che valga la (4.1). La risposta è che β è univocamente determinato a meno di omotetie. Vale infatti il seguente risultato.

Lemma (4.4). *Sia Φ un automorfismo dello spazio vettoriale V e sia $\varphi : \mathbb{P}V \to \mathbb{P}V$ la corrispondente proiettività. Allora $\varphi = \mathbf{1}$ se e solo se Φ è una omotetia.*

Che $\varphi = \mathbf{1}$ quando Φ è una omotetia è ovvio. Viceversa, dire che φ è l'identità equivale a dire che, per ogni vettore non nullo v, vi è uno scalare non nullo λ_v tale che $\Phi(v) = \lambda_v v$. Siano ora v e w due vettori non nulli. Se v e w sono dipendenti, è chiaro che $\lambda_v = \lambda_w$. Se no, scriviamo

$$\lambda_{v+w}(v+w) = \Phi(v+w) = \Phi(v) + \Phi(w) = \lambda_v v + \lambda_w w\,,$$

e osserviamo che dall'indipendenza di v e w segue che

$$\lambda_v = \lambda_{v+w} = \lambda_w\,.$$

In conclusione λ_v non dipende da v, e quindi Φ è una omotetia, come si voleva.

Il prossimo risultato è una caratterizzazione delle prospettività.

Proposizione (4.5). *Siano S e T iperpiani in $\mathbb{P}V$, e sia $\varphi : S \to T$ una proiettività. Allora φ è una prospettività se e solo se $\varphi(x) = x$ per ogni $x \in S \cap T$.*

Il "solo se" è ovvio. Per dimostrare il viceversa, scriviamo $S = \mathbb{P}U$, $T = \mathbb{P}W$, e sia $\Phi : U \to W$ una applicazione lineare corrispondente a φ. Poniamo anche $H = U \cap W$. Per il Lemma (4.4), la restrizione di Φ ad H è un'omotetia; rimpiazzando Φ con $k\Phi$, dove k è una costante opportuna, si può supporre che sia l'identità. Siano u e v elementi di $U - H$. Si può scrivere, in modo unico, $v = au + h$, dove a è uno scalare e $h \in H$. Allora

$$\Phi(v) - v = a\Phi(u) + \Phi(h) - au - h = a(\Phi(u) - u)\,;$$

in altre parole, $P = [\Phi(v) - v]$ non dipende da v. La prospettività di centro P non è altro che φ. In effetti, per ogni $v \in U - H$, i vettori v, $\Phi(v)$ e $\Phi(v) - v$ sono dipendenti, cioè $[v]$, $\varphi[v] = [\Phi(v)]$ e P sono allineati.

Il risultato che segue è il cosiddetto "teorema fondamentale" (della geometria proiettiva?).

Teorema (4.6). *Siano S e T spazi proiettivi di dimensione n su un campo K. Siano $P_0, \dots, P_n, Q$ punti di S tali che $n+1$ qualsiasi tra loro non giacciano in un iperpiano, e $P'_0, \dots, P'_n, Q'$ punti di T con la stessa proprietà. Allora vi è un unica proiettività $\varphi : S \to T$ tale che $\varphi(Q) = Q'$ e $\varphi(P_i) = P'_i$ per ogni i.*

Scriviamo $S = \mathbb{P}V$, $T = \mathbb{P}W$, $Q = [w]$, $Q' = [w']$, $P_i = [v_i]$, $P'_i = [v'_i]$. Dato che $P_0, \dots, P_n$ non sono contenuti in un iperpiano, $v_0, \dots, v_n$ costituiscono una base di V; lo stesso si può dire di $v'_0, \dots, v'_n$ rispetto a V'. Ne segue in particolare che ci sono scalari a_i tali che $w = \sum a_i v_i$. Se a_j fosse nullo per qualche j, questo direbbe che $w, v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_n$ sono dipendenti (il cappuccio significa che il termine sottostante viene omesso); i punti $Q, P_0, \dots, \widehat{P_j}, \dots, P_n$ sarebbero dunque contenuti in un iperpiano, contro l'ipotesi. Rimpiazzando v_j con $a_j v_j$ per ogni j possiamo dunque supporre che $w = \sum v_i$. Analogamente possiamo supporre che $w' = \sum v'_i$.

Dimostriamo l'esistenza di φ. Sia $\Phi : V \to V'$ l'unica applicazione lineare tale che $\Phi(v_i) = v'_i$ per ogni i, e sia $\varphi : S \to T$ la corrispondente proiettività. È ovvio che $\varphi(P_i) = P'_i$ per ogni i. Inoltre, per linearità,

$$\Phi(w) = \sum \Phi(v_i) = \sum v'_i = w' \,,$$

e quindi $\varphi(Q) = Q'$. Questo dimostra che φ ha la proprietà richiesta.

Per dimostrare l'unicità di φ basta trattare il caso in cui $V = V'$, $Q = Q'$ e $P_i = P'_i$ per ogni i. Bisogna allora mostrare che φ non può essere che l'identità, cioè che, se $\Phi : V \to V'$ è una applicazione lineare corrispondente a φ, Φ è un'omotetia. Dato che $\varphi(P_i) = P_i$ per ogni i e $\varphi(Q) = Q$, vi sono costanti $\lambda_0, \ldots, \lambda_n, \mu$ tali che $\Phi(v_i) = \lambda_i v_i$ per ogni i e $\Phi(w) = \mu w$. Allora

$$\sum \mu v_i = \mu w = \Phi(w) = \sum \Phi(v_i) = \sum \lambda_i v_i \,.$$

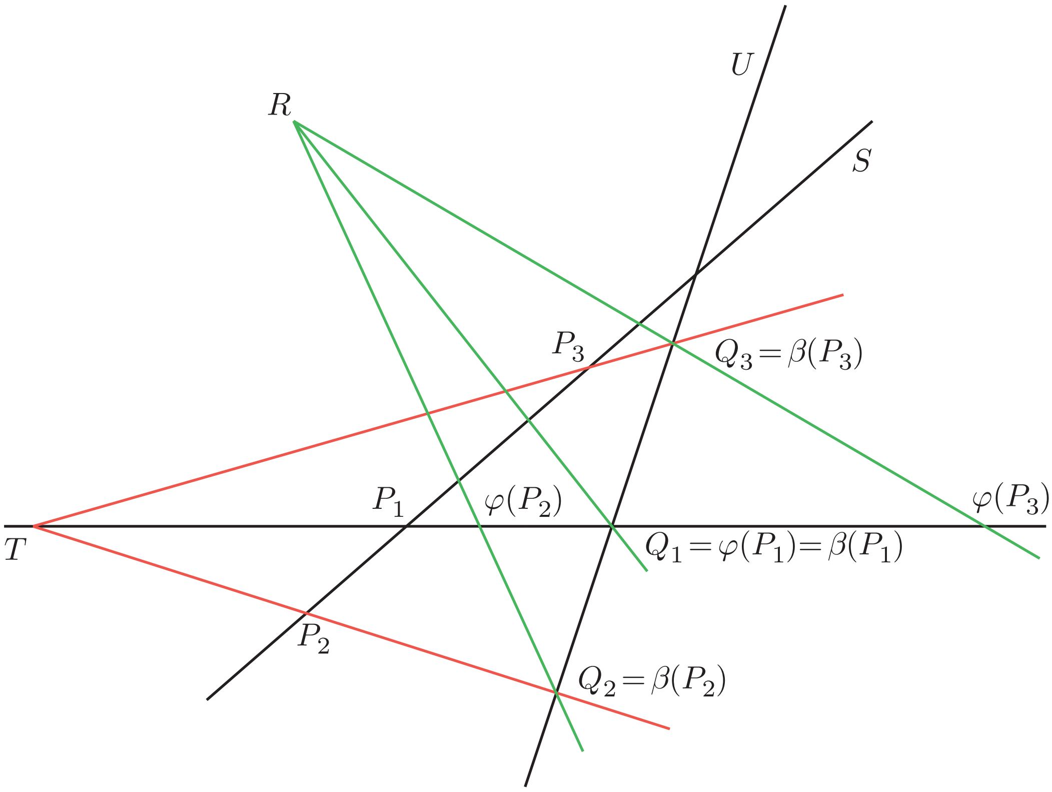
Dato che i v_i sono indipendenti, ciò implica che $\lambda_i = \mu$ per ogni i. Dunque Φ è l'omotetia di ragione μ. Questo conclude la dimostrazione del teorema.

Possiamo ora mostrare che la definizione di proiettività data in questa sezione è in realtà equivalente a quella data nell'introduzione.

Teorema (4.7). *Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo, e siano S e T iperpiani in $\mathbb{P}$. Ogni proiettività da S a T è una composizione di prospettività.*

Ragioneremo per induzione sulla dimensione di $\mathbb{P}$. Se questa è 1, ogni proiettività da S a T è ovviamente una prospettività. Altrimenti, sia $\varphi : S \to T$ una proiettività. Possiamo supporre che $S \neq T$. Infatti, se questo non è vero, sia $\alpha : T \to R$ una prospettività con $R \neq T$; se $\alpha \circ \varphi$ è una composizione di prospettività, lo stesso è vero per φ, dato che anche α^{-1} è una prospettività. Ora poniamo $H = S \cap T$. Dato che H e $\varphi(H)$ sono iperpiani in T, per ipotesi induttiva $\varphi_{|H} : H \to \varphi(H)$ è una composizione di prospettività, che si estendono a prospettività $\beta_1, \ldots, \beta_h$ tra iperpiani di $\mathbb{P}$, il primo dei quali si può supporre sia S. Per costruzione, le restrizioni ad H di φ e $\beta_h \circ \cdots \circ \beta_1 : S \to T'$ coincidono, e inoltre $T' \neq T$. Dunque la restrizione di $\gamma = \beta_h \circ \cdots \circ \beta_1 \circ \varphi^{-1} : T \to T'$ a $\varphi(H)$ è l'identità, e quindi γ è una prospettività. In conclusione φ è il prodotto di prospettività $\gamma^{-1} \circ \beta_h \circ \cdots \circ \beta_1$.

Osservazione (4.8). Se $\mathbb{P}$, S e T sono come nell'enunciato di (4.7) e $\mathbb{P}$ ha dimensione 2, ogni proiettività $\varphi : S \to T$ è composizione di al più 2 prospettività se $S \neq T$ e di al più 3 prospettività se $S = T$. Per mostrarlo, ci si può limitare al caso in cui $S \neq T$. Infatti il caso $S = T$ si riduce a questo applicando il risultato a $\xi \circ \varphi$, dove $\xi : T \to T'$ è una prospettività con $T' \neq T$. Se $S \neq T$, indichiamo con P_1 il punto di intersezione di S e T. Se $\varphi(P_1) = P_1$, φ è una prospettività per la Proposizione (4.5). Se no, sia U una retta passante per $Q_1 = \varphi(P_1)$, diversa da T. Siano P_2 e P_3 punti distinti di S, diversi da P_1. Sia β una prospettività tra S e U che manda P_1 in Q_1, e poniamo $Q_i = \beta(P_i)$, $i = 2, 3$. Sia R il punto di intersezione della retta per Q_2 e $\varphi(P_2)$ con quella per Q_3 e $\varphi(P_3)$. Sia $\alpha : U \to T$ la prospettività di centro R.



Dato che $\alpha(Q_i) = \varphi(P_i)$, $i = 1, 2, 3$, si conclude che $\alpha \circ \beta(P_i) = \varphi(P_i)$, $i = 1, 2, 3$, e quindi, per (4.6), che $\alpha \circ \beta = \varphi$.

Esercizio (4.9). Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione 2 su $\mathbb{R}$, e sia S una retta in $\mathbb{P}$. Trovare una proiettività di S in sè che non è composizione di meno di 3 prospettività.

Esercizio (4.10). Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione 2 su $\mathbb{C}$, e sia S una retta in $\mathbb{P}$. Mostrare che ogni proiettività di S in sè è composizione di al più 2 prospettività.

Esercizio (4.11). Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo, siano S, T iperpiani distinti in $\mathbb{P}$, e sia $\varphi : S \to T$ una proiettività. Mostrare che φ è composizione di al più $\dim \mathbb{P}$ prospettività.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n+1$ sul campo K. La scelta di una base per V determina un isomorfismo tra V e K^{n+1}, e quindi una proiettività $\varphi : \mathbb{P}V \to \mathbb{P}(K^{n+1})$. Chiameremo una tale proiettività una scelta di un *sistema di coordinate omogenee* su $\mathbb{P}V$. Scriveremo $\mathbb{P}^n_K$ per indicare $\mathbb{P}(K^{n+1})$, o anche semplicemente $\mathbb{P}^n$ quando non c'è rischio di confusione. Scriveremo $[x_0 : \cdots : x_n]$ per indicare il punto $[(x_0, \dots, x_n)]$ di $\mathbb{P}^n_K$. Se P è un punto di $\mathbb{P}V$ e $\varphi(P) = [x_0 : \cdots : x_n]$, diremo che $x_0, \dots, x_n$ sono le *coordinate omogenee* di P; beninteso, esse sono definite solo a meno di omotetie. Per ogni i, il luogo di equazione $x_i = 0$ è un iperpiano H_i in $\mathbb{P}^n_K$; indichiamo con X il complementare di H_0, e sia Π l'iperpiano affine in K^{n+1} di equazione $x_0 = 1$. Sappiamo che

$$(1, y_1, \dots, y_n) \to [1 : y_1 : \cdots : y_n]$$

identifica Π a X. Viceversa, se $[x_0 : \cdots : x_n] \in X$, cioè se $x_0 \neq 0$, il punto di Π ad esso corrispondente è $(1, y_1, \ldots, y_n)$, dove

$$y_i = \frac{x_i}{x_0}\,, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Diremo che $y_1, \ldots, y_n$ sono le *coordinate affini* (rispetto alle scelte fatte, naturalmente) del punto $[x_0 : \cdots : x_n]$ o del punto di $\mathbb{P}V$ ad esso corrispondente.

5 Il punto di vista assiomatico in geometria proiettiva.
Sia $S = \mathbb{P}V$ un piano proiettivo sul campo K. Nella sezione 3 si è osservato che

P1. *Per due punti distinti di S passa una e una sola retta.*

P2. *Due rette in S si incontrano in almeno un punto.*

Notiamo ora che valgono anche le seguenti proprietà.

P3. *In S ci sono tre punti non allineati.*

P4. *Ogni retta in S contiene almeno tre punti.*

La proprietà P3 riflette il fatto che V ha dimensione maggiore di 2, e quindi contiene tre vettori indipendenti v_1, v_2, v_3; l'indipendenza di questi vettori si traduce nel non essere $[v_1]$, $[v_2]$, $[v_3]$ contenuti in una stessa retta. Notiamo a questo proposito che le proprietà P1 e P2 sono valide anche se S ha dimensione 1 o 0.

La proprietà P4 esprime invece il fatto che in uno spazio vettoriale di dimensione 2 vi sono sempre almeno tre vettori a due a due non proporzionali; se W è lo spazio vettoriale in questione e v, w una sua base, tali sono ad esempio v, w e $v+w$. Va anche notato che, se K è il campo con due elementi, ogni retta proiettiva su K contiene esattamente tre punti; infatti, se W, v e w sono come sopra, in questo caso gli elementi di W sono esattamente 0, v, w e $v + w$, e quindi quelli di $\mathbb{P}W$ sono $[v]$, $[w]$ e $[v + w]$.

Sia ora S un insieme, e $\mathcal{R}$ una famiglia di suoi sottinsiemi, convenzionalmente chiamati "rette". Diremo che $(S, \mathcal{R})$ è un *piano proiettivo astratto* se per esso valgono le proprietà P1-P4. Quanto si è appena finito di osservare è che un piano proiettivo è un piano proiettivo astratto. Non è invece vero il viceversa, anche se non daremo esempi a sostegno di questa affermazione, rimandando per questi a [4] o a [3]. Si possono dare analoghi degli assiomi di incidenza P1-P4 per definire una nozione di spazio proiettivo astratto in qualsiasi dimensione. Ad esempio, uno spazio proiettivo tridimensionale è una terna $(S, \mathcal{R}, \mathcal{P})$, dove gli elementi di $\mathcal{R}$, convenzionalmente detti "rette", e quelli di $\mathcal{P}$, convenzionalmente detti "piani", sono sottinsiemi di S che soddisfano i seguenti sei assiomi:

S1. *Per due punti distinti di S passa una e una sola retta.*

S2. *Per tre punti non allineati di S passa uno e un solo piano.*

S3. *Una retta e un piano in S si incontrano in almeno un punto.*

S4. *Due piani in S hanno almeno una retta in comune.*

S5. *In S ci sono quattro punti non complanari, a tre a tre non allineati.*

S6. *Ogni retta in S contiene almeno tre punti.*

Esercizio (5.1). Dimostrare che uno spazio proiettivo della forma $\mathbb{P}V$, dove V è uno spazio vettoriale di dimensione 4 su un campo K, soddisfa S1-S6.

Esercizio (5.2). Sia $(S, \mathcal{R}, \mathcal{P})$ uno spazio proiettivo astratto di dimensione 3, e sia Π un elemento di $\mathcal{P}$. Indichiamo con $\mathcal{R}_\Pi$ l'insieme di tutte le rette contenute in Π. Dimostrare direttamente che $(\Pi, \mathcal{R}_\Pi)$ è un piano proiettivo astratto.

È un fatto notevole che, da dimensione 3 in su, qualsiasi spazio proiettivo astratto è lo spazio proiettivo costruito su uno spazio vettoriale, sia pure uno spazio vettoriale su un anello di divisione, non necessariamente su un campo. Torneremo sulla questione nella sezione 6. In dimensione 1 gli assiomi di incidenza si riducono a poca cosa; l'unico sensato è che una retta proiettiva deve contenere almeno tre punti. Dunque la teoria degli spazi proiettivi astratti di dimensione 1 non è altro che la teoria degli insiemi con almeno tre elementi! In dimensione 2 invece gli assiomi di incidenza sono abbastanza restrittivi da definire delle strutture tutt'altro che banali, ma non abbastanza forti da imporre a queste di provenire da spazi vettoriali, se non sotto condizioni aggiuntive che saranno discusse nella sezione 6.

Le applicazioni "naturali" tra spazi proiettivi astratti sono quelle che mandano rette in rette, piani in piani, e così via. Una applicazione di questo tipo che sia anche biunivoca si dice una *collineazione*. È chiaro che la composizione di due collineazioni è una collineazione. Anche l'inversa di una collineazione è sempre una collineazione; lo dimostreremo solo per collineazioni tra spazi proiettivi astratti di dimensione non superiore a 3. Siano S e T due tali spazi, e sia $\varphi : S \to T$ una collineazione. Sia A un sottinsieme di S e supponiamo che $\varphi(A)$ sia una retta. Siano $\varphi(x)$ e $\varphi(y)$ punti distinti di $\varphi(A)$. Se L è la retta per x e y, allora $\varphi(L)$ è una retta passante per $\varphi(x)$ e $\varphi(y)$ e quindi coincide con $\varphi(A)$. Ne segue che $A = L$; in conclusione, se $\varphi(A)$ è una retta, anche A lo è. Analogamente, se $\varphi(A)$ è un piano, siano $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ e $\varphi(z)$ punti non allineati di $\varphi(A)$, che esistono per (5.2). Ragionando come per le rette, si mostra che A è il piano per x, y e z. Questo conclude la dimostrazione.

È evidente che, se $\varphi : \mathbb{P}V \to \mathbb{P}W$ è una proiettività, essa è anche una collineazione. Ci si può chiedere se sia vero il viceversa. Se $\mathbb{P}V$ e $\mathbb{P}W$ hanno dimensione 1, la risposta è sicuramente del tutto negativa; in questo caso infatti una collineazione non è nulla più che una applicazione biunivoca. La situazione è radicalmente diversa in dimensione 2 o più. Per spiegare cosa accade in questo caso è necessaria una piccola digressione algebrica. Sia K un campo; un *automorfismo* σ di K è un isomorfismo da K in K, cioè una applicazione biunivoca di K in sè tale che $\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y)$ e $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ per ogni scelta di x e y. Un esempio è dato dal coniugio in $\mathbb{C}$. Siano ora V e W due spazi vettoriali su K. Una applicazione $\alpha : V \to W$ si dice *σ-semilineare* se, per ogni scelta di $u, v \in V$ e $x \in K$,

$$\begin{aligned} \alpha(u+v) &= \alpha(u) + \alpha(v)\,, \\ \alpha(xv) &= \sigma(x)\alpha(v)\,. \end{aligned}$$

Se σ è un automorfismo del campo K, un esempio di applicazione σ-semilineare è dato dall'applicazione $\beta : K^n \to K^n$ definita da $\beta(z_1, \ldots, z_n) = (\sigma(z_1), \ldots, \sigma(z_n))$. Una applicazione che sia σ-semilineare per qualche σ sarà detta semplicemente *semilineare*. Possiamo ora descrivere quale sia la struttura delle collineazioni.

Teorema (5.3). *Siano V e W spazi vettoriali sul campo K e sia $\varphi : \mathbb{P}V \to \mathbb{P}W$ una collineazione. Se $\dim \mathbb{P}V \geq 2$, esiste una applicazione semilineare biunivoca $\alpha : V \to W$ tale che*

$$\varphi[v] = [\alpha(v)]$$

per ogni $v \neq 0$. Viceversa, ogni applicazione di questa forma è una collineazione, senza limitazioni di dimensione.

È immediato verificare che una applicazione del tipo indicato nell'enunciato è una collineazione. La parte veramente interessante del teorema è il viceversa. Per dimostrarla, notiamo che $\mathbb{P}V$ e $\mathbb{P}W$ hanno necessariamente la stessa dimensione n; esistono quindi proiettività tra $\mathbb{P}V$, $\mathbb{P}W$ e $\mathbb{P}^n_K$. Possiamo dunque limitarci al caso in cui $\mathbb{P}V = \mathbb{P}W = \mathbb{P}^n_K$. Poniamo

$$P_i = [0 : \cdots : 0 : \underset{i}{1} : 0 : \cdots : 0]\,,$$

$$Q = [1 : \cdots : 1]\,.$$

Per il Teorema (4.6) vi è una proiettività ψ tale che $\psi(P_i) = \varphi(P_i)$ per ogni i e $\psi(Q) = \varphi(Q)$. Rimpiazzando φ con $\psi^{-1} \circ \varphi$ possiamo dunque supporre che $\varphi(P_i) = P_i$ per ogni i e $\varphi(Q) = Q$. In questo caso basterà mostrare che, se $n \geq 2$, allora vi è un automorfismo σ di K tale che

$$\varphi[x_0 : \cdots : x_n] = [\sigma(x_0) : \cdots : \sigma(x_n)]$$

per ogni vettore non nullo $(x_0, \ldots, x_n) \in K^{n+1}$.

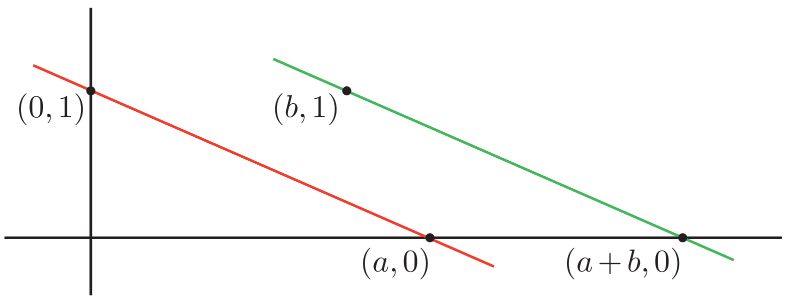
Se A è un sottoinsieme di $\mathbb{P}^n_K$, diremo che A è *fisso per* (o *fissato da*) φ se $\varphi(A) = A$. Diremo che un punto P è fisso se lo è $\{P\}$, cioè se $\varphi(P) = P$. L'iperpiano per $P_0, \ldots, \widehat{P_i}, \ldots, P_n$ è quello di equazione $x_i = 0$, che indichiamo con $\overline{H}_i$. Analogamente, l'iperpiano per $Q, P_0, \ldots, \widehat{P_i}, \ldots, \widehat{P_j}, \ldots, P_n$ è quello di equazione $x_i = x_j$, che indichiamo con $\overline{H}_{ij}$. Dato che Q e i P_h sono fissi, anche $\overline{H}_i$ e $\overline{H}_{ij}$ sono fissi. Sia ora X il complementare di $\overline{H}_0$, che è ovviamente anch'esso fisso per φ. Poniamo $H_i = \overline{H}_i \cap X$, per $i > 0$, e $H_{ij} = \overline{H}_{ij} \cap X$. Le coordinate affini in X sono $y_i = x_i/x_0$, $i = 1, \ldots, n$. I punti Q e P_0 hanno coordinate affini $(1, \ldots, 1)$ e $(0, \ldots, 0)$, rispettivamente; gli altri P_i non appartengono a X. Il piano H_i ha equazione $y_i = 0$, mentre H_{ij} ha equazione $y_i = y_j$ quando $0 < i \leq j$ e $y_j = 1$ quando $i = 0$. Indichiamo con L_i la retta intersezione di $H_1, \ldots, \widehat{H_i}, \ldots, H_n$, che è ovviamente fissa. La collineazione φ induce una applicazione biunivoca di L_i in sè, che è della forma

$$(0, \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0) \mapsto (0, \ldots, 0, \sigma_i(t), 0, \ldots, 0)\,,$$

dove σ_i è una applicazione biunivoca di K in sè. Dato che P_0 è fisso per φ, si ha che $\sigma_i(0) = 0$ per ogni i. Sia $P = (t_1, \ldots, t_n)$ un punto di X; allora P è il solo punto di intersezione degli iperpiani affini di equazione $y_i = t_i$, $i = 1, \ldots, n$, o, che è lo stesso, degli iperpiani proiettivi di equazione $x_i = t_i x_0$, $i = 1, \ldots, n$. L'iperpiano $x_1 = t_1 x_0$ è il solo che passa per i punti $(t_1, 0, \ldots, 0), P_2, \ldots, P_n$. La sua immagine tramite φ è il solo iperpiano che passa per $\varphi(t_1, 0, \ldots, 0), \varphi(P_2), \ldots, \varphi(P_n)$, cioè per $(\sigma_1(t_1), 0, \ldots, 0), P_2, \ldots, P_n$; è quindi l'iperpiano di equazione $x_1 = \sigma_1(t_1)x_0$. Allo stesso modo si mostra che, per ogni i, l'immagine dell'iperpiano $x_i = t_i x_0$ è l'iperpiano $x_i = \sigma_i(t_i)x_0$. Dunque l'immagine di P è il punto di intersezione degli iperpiani $x_i = \sigma_i(t_i)x_0$, $i = 1, \ldots, n$, cioè il punto $(\sigma_1(t_1), \ldots, \sigma_n(t_n))$. Supponiamo ora che P sia della forma $(t, \ldots, t)$, cioè che appartenga alla retta L di equazioni $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$. Dato che L è l'intersezione di tutti gli iperpiani H_{ij} con $i, j > 0$, è fissa per φ. Dunque $\varphi(P) = (\sigma_1(t), \ldots, \sigma_n(t))$ appartiene anch'esso a L. Questo significa che $\sigma_1(t) = \sigma_2(t) = \cdots = \sigma_n(t)$. Dato che t è arbitrario, tutti i σ_i sono uguali. In conclusione φ è della forma

$$\varphi(t_1, \ldots, t_n) = (\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n)),$$

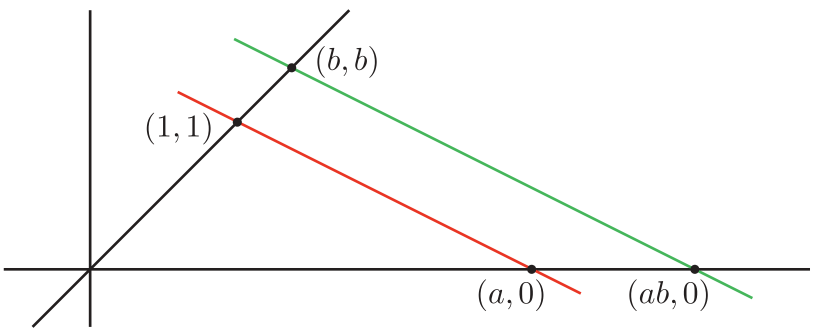
dove σ è una applicazione biunivoca di K in sè tale che $\sigma(0) = 0$. Notiamo anche che il punto di intersezione di L_1 e H_{01}, cioè $(1, 0, \ldots, 0)$, è fisso. Questo ci dice che $\sigma(1) = 1$. Ora mostriamo che σ è un automorfismo di K. Dato che il piano proiettivo di equazioni $x_3 = x_4 = \cdots = x_n = 0$ è fisso per φ, basterà dimostrarlo sotto l'ipotesi semplificativa che $n = 2$. Il punto chiave della dimostrazione consiste, dati $a, b \in K$, nel trovare costruzioni geometriche opportune della loro somma e del loro prodotto. Per quanto riguarda la somma, sia M la retta per $(0, 1)$ e $(a, 0)$, e sia N la parallela a M passante per $(b, 1)$. Allora il punto di intersezione di N con L_1 è $(a + b, 0)$.



Ora applichiamo φ a questa configurazione. Da una parte $\varphi(a + b, 0) = (\sigma(a + b), 0)$. Dall'altra la retta $\varphi(M)$ passa per $(0, 1)$ e $(\sigma(a), 0)$, la retta $\varphi(N)$ passa per $(\sigma(b), 1)$ ed è parallela a $\varphi(M)$ perchè non l'interseca. Quindi il punto di intersezione di $\varphi(N)$ e $\varphi(L_1) = L_1$, cioè $\varphi(a + b, 0)$, è $(\sigma(a) + \sigma(b), 0)$. In conclusione

$$\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b).$$

Passiamo al prodotto. Sia R la retta per $(1, 1)$ e $(a, 0)$, e sia S la parallela a R passante per (b, b). La retta S taglia L_1 nel punto $(ab, 0)$.



Ragionando come sopra, si conclude che $\varphi(ab,0)$ è uguale sia a $(\sigma(ab),0)$ che a $(\sigma(a)\sigma(b),0)$, e quindi che

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)\,.$$

Sia ora $[x_0 : \cdots : x_n]$ un punto di $\mathbb{P}^n_K$. Vogliamo mostrare che $\varphi[x_0 : \cdots : x_n]$ non è altro che $[\sigma(x_0) : \cdots : \sigma(x_n)]$. Distinguiamo due casi. Se $x_0 \neq 0$

$$\begin{aligned}\varphi[x_0 : \cdots : x_n] &= \varphi\left[1 : \frac{x_1}{x_0} : \cdots : \frac{x_n}{x_0}\right] = \left[1 : \sigma\left(\frac{x_1}{x_0}\right) : \cdots : \sigma\left(\frac{x_n}{x_0}\right)\right] \\ &= \left[1 : \frac{\sigma(x_1)}{\sigma(x_0)} : \cdots : \frac{\sigma(x_n)}{\sigma(x_0)}\right] = [\sigma(x_0) : \cdots : \sigma(x_n)]\,.\end{aligned}$$

Supponiamo invece che $x_0 = 0$. Allora $[0 : x_1 : \cdots : x_n]$ è il punto di intersezione dell'iperpiano H_0 con la retta per P_0 e $[1 : x_1 : \cdots : x_n]$. Dunque la sua immagine è l'intersezione di H_0 con la retta per P_0 e $\varphi[1 : x_1 : \cdots : x_n] = [1 : \sigma(x_1) : \cdots : \sigma(x_n)]$, cioè $[0 : \sigma(x_1) : \cdots : \sigma(x_n)]$. Questo conclude la dimostrazione del teorema.

Non si può dunque dire, in generale, che ogni collineazione è una proiettività, anche se, per spazi proiettivi di dimensione almeno 2, una tale affermazione non è molto lontana dal vero. Lo si può però affermare con certezza in due casi importanti, cioè quando il campo base è $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Q}$. Ciò discende dal seguente risultato.

Proposizione (5.4). *Il solo automorfismo del campo reale è l'identità. Lo stesso è vero per il campo dei numeri razionali.*

In virtù del Teorema (5.3) ciò implica immediatamente quanto annunciato.

Corollario (5.5). *Ogni collineazione tra spazi proiettivi di dimensione almeno 2 su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{Q}$ è una proiettività.*

Dimostriamo ora la Proposizione (5.4). Sia σ un automorfismo di $\mathbb{Q}$ o di $\mathbb{R}$. Innanzitutto, se n è un intero positivo, allora

$$\sigma(n) = \sigma(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ volte}}) = \underbrace{\sigma(1) + \cdots + \sigma(1)}_{n \text{ volte}} = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ volte}} = n\,.$$

Inoltre

$$0 = \sigma(0) = \sigma(n-n) = \sigma(n) + \sigma(-n) = n + \sigma(-n)\,,$$

quindi $\sigma(-n) = -n$. Se poi n ed m sono interi e m non è nullo, allora

$$n = \sigma(n) = \sigma\left(m\frac{n}{m}\right) = \sigma(m)\sigma\left(\frac{n}{m}\right) = m\sigma\left(\frac{n}{m}\right)\,,$$

da cui

$$\sigma\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}\,.$$

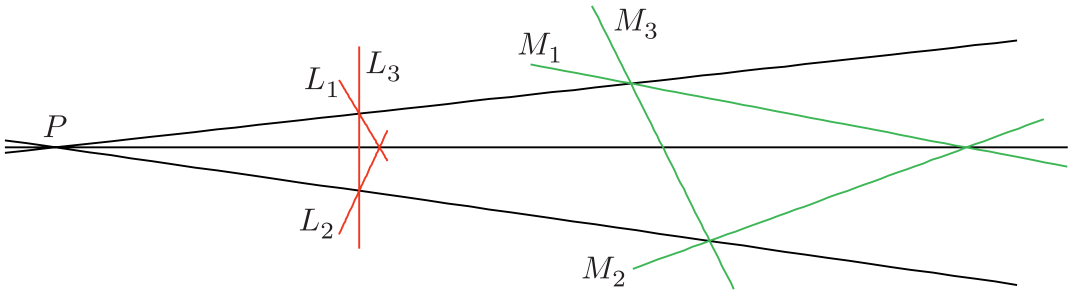
Questo dimostra la proposizione nel caso dei razionali. Notiamo ora che un numero reale non nullo è positivo se e solo se è il quadrato di un numero reale. Sia x un numero reale positivo, e quindi della forma $x = y^2$ per qualche y. Facendo agire σ si ottiene che $\sigma(x) = \sigma(y)^2$, e quindi anche $\sigma(x)$ è positivo. Ne segue che, per ogni numero reale x, $|\sigma(x)| = \sigma(|x|)$. Ne segue anche che, se x e z sono numeri reali tali che $x > z$, allora $\sigma(x) > \sigma(z)$. Infatti l'ipotesi si traduce in $x - z > 0$, da cui $\sigma(x) - \sigma(z) = \sigma(x - z) > 0$, cioè $\sigma(x) > \sigma(z)$. Sia ora x un numero reale, e sia $\{x_n\}$ una successione di numeri razionali convergente a x. Se ε è un numero razionale positivo, $|x_n - x| < \varepsilon/2$ per n abbastanza grande. Dunque

$$|\sigma(x) - x| \leq |\sigma(x) - \sigma(x_n)| + |\sigma(x_n) - x| = \sigma(|x - x_n|) + |x_n - x| < \sigma(\varepsilon/2) + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

per n abbastanza grande. Data l'arbitrarietà di ε se ne deduce che $\sigma(x) = x$. Questo conclude la dimostrazione.

6 I teoremi di Desargues e Pappo.

Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo astratto. Un *triangolo* in $\mathbb{P}$ è una terna di rette distinte a due a due intersecantisi. Due triangoli (L_1, L_2, L_3) e (M_1, M_2, M_3) si dicono *prospettici* se esiste un punto $P \in \mathbb{P}$ tale che, per ogni scelta di i e j, i punti di intersezione di L_i e L_j e di M_i e M_j siano allineati con P.



A volte chiameremo il dato dei due triangoli (L_1, L_2, L_3) e (M_1, M_2, M_3) e del punto P una *configurazione di Desargues*. Notiamo che, per ogni i, L_i e M_i sono complanari e quindi si intersecano.

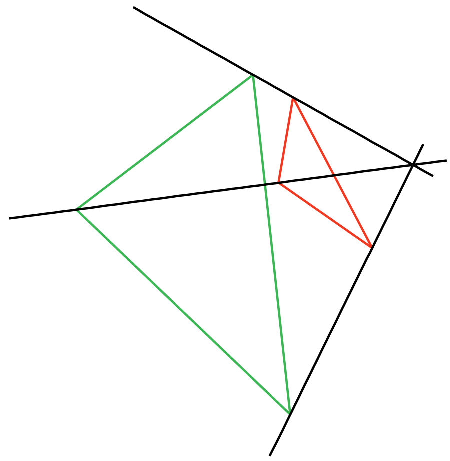
Il risultato fondamentale sulle coppie di triangoli prospettici è il teorema di Desargues.

Teorema (6.1) (Teorema di Desargues). *Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo astratto e siano (L_1, L_2, L_3) e (M_1, M_2, M_3) due triangoli prospettici in $\mathbb{P}$ tali che $L_i \neq M_i$ per ogni i; indichiamo con P_i il punto di intersezione di L_i e M_i. Allora:*

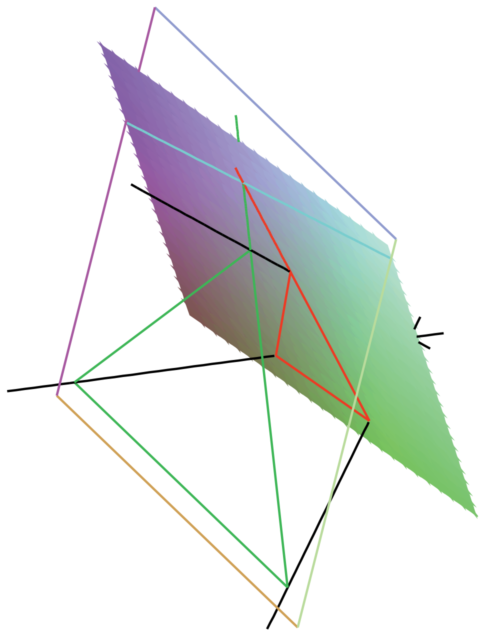
i) *Se $\mathbb{P}$ ha dimensione 3 o più, i punti P_1, P_2, P_3 sono allineati.*

ii) *La stessa conclusione è valida se $\mathbb{P}$ ha dimensione 2 ed è immergibile come sottospazio proiettivo in uno spazio proiettivo astratto di dimensione maggiore di 2.*

Diamo un cenno di dimostrazione, aiutandoci con delle figure. Dimostriamo intanto i), nel caso di una configurazione di Desargues



non contenuta in un piano; In altre parole, supponiamo che i piani Π_L e Π_M (il piano "colorato" e quello "trasparente" nella figura qui sotto) su cui giacciono i triangoli (L_1, L_2, L_3) e (M_1, M_2, M_3) siano distinti. Dato che qualsiasi configurazione di Desargues è contenuta in un sottospazio tridimensionale di $\mathbb{P}$, possiamo supporre che $\mathbb{P}$ stesso abbia dimensione 3. Ne segue che Π_L e Π_M si tagliano in una retta R (in azzurro nel disegno).

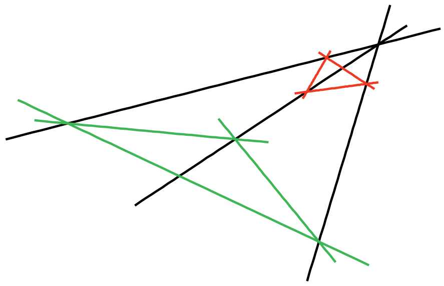


Per ogni i, il punto di intersezione di L_i e M_i giace sia su Π_L che su Π_M, e quindi su R. Questo conclude la dimostrazione nel caso che stiamo considerando.

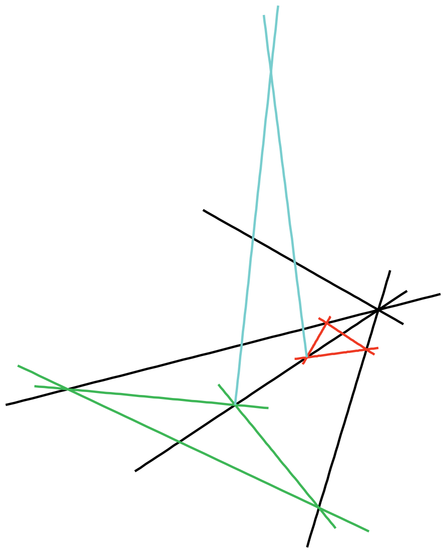
Ora resta da esaminare il caso di una configurazione di Desargues

$$((L_1, L_2, L_3), (M_1, M_2, M_3), P)$$

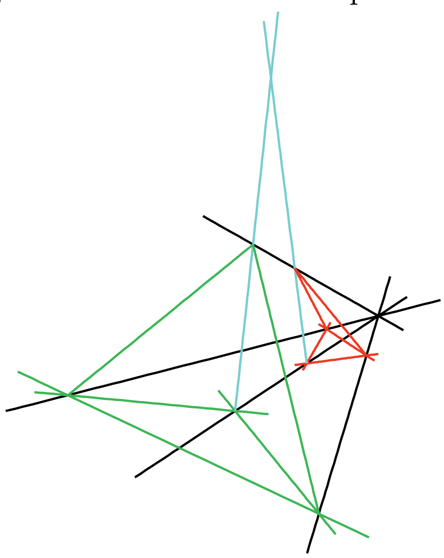
contenuta in un piano Π.



Tracciamo una retta S per P che non sia contenuta in Π, e scegliamo un punto Q esterno sia a Π che a S ma contenuto nel piano determinato da S e dal punto di intersezione di L_1 e L_2 (il punto di intersezione delle rette azzurre nella figura).



Siano Q_L e Q_M i punti di intersezione con S delle rette per Q e per il punto di intersezione di L_1 e L_2 e per Q e per il punto di intersezione di M_1 e M_2 (le rette azzurre nella figura qui sopra). Per $i = 1, 2$, sia L'_i la retta per Q_L e per il punto di intersezione di L_i con L_3. Definiamo allo stesso modo M'_1 e M'_2. Per costruzione, $((L'_1, L'_2, L_3), (M'_1, M'_2, M_3), P)$ è una configurazione di Desargues non contenuta in un piano.



Sappiamo dunque che vi è una retta R' contenente P_1', P_2', P_3, dove P_i' è il punto di intersezione di L_i' e M_i'. Indichiamo con R la retta intersezione di Π e del piano per Q ed R'. Per proiezione, R deve contenere P_1, P_2 e P_3. La dimostrazione è ora completa.

Esecizio (6.2). Giustificare rigorosamente, in base ai soli assiomi S1-S6, tutti i passaggi della dimostrazione del teorema di Desargues.

Osservazione (6.3). Il teorema di Desargues, opportunamente riformulato, vale anche per configurazioni di Desargues degeneri, nelle quali cioè L_i coincida con M_i per qualche i. L'enunciato che continua a valere anche in questa situazione, e che nel caso non degenere si riduce a quello di (6.1), è che vi è una retta R che contiene un punto comune a L_i e a M_i per ogni i. Nel caso degenere, quando L_i coincide con M_i, la retta cercata non è altro che L_i.

Nella sezione 5 si è accennato al fatto che qualsiasi spazio proiettivo astratto di dimensione 3 o più è lo spazio proiettivo costruito su uno spazio vettoriale, sia pure uno spazio vettoriale su un anello di divisione, non necessariamente su un campo. In realtà si può essere ancora più precisi. Per spiegare quello che intendiamo dire, cominciamo con un po' d'algebra. Un *anello di divisione* è un anello A con la proprietà che l'insieme $A^\times$ dei suoi elementi non nulli, con l'operazione di moltiplicazione, è un gruppo. In altre parole, A è un anello con $\mathbf{1}$ in cui, per ogni $a \neq 0$, esiste un elemento b tale che $ab = ba = \mathbf{1}$. La definizione è praticamente identica a quella di campo; la sola differenza è che non si richiede al gruppo $A^\times$ di essere abeliano. Un teorema di Wedderburn dice che ogni anello di divisione finito è un campo. Per trovare esempi non banali di anelli di divisione dobbiamo dunque cercare tra gli anelli infiniti.

Esempio-Esercizio (6.4) (I Quaternioni). Sia $\mathbb{H}$ l'insieme delle coppie (z, w) di numeri complessi, con le operazioni

$$\begin{aligned} (z,w) + (z',w') &= (z+z', w+w')\,, \\ (z,w)(z',w') &= (zz' - w\overline{w'}, zw' + w\overline{z'})\,. \end{aligned}$$

Si mostri che $\mathbb{H}$ è un anello, e che $\mathbf{1} = (1,0)$ è un elemento neutro per la moltiplicazione in $\mathbb{H}$. Si mostri che, se $(z,w) \in \mathbb{H}$ e $x \in \mathbb{C}$, allora $(x,0)(z,w) = (xz, xw)$. In particolare l'insieme degli elementi di $\mathbb{H}$ della forma $(x,0)$ è un sottoanello isomorfo a $\mathbb{C}$. Sia $h = (z,w)$ un elemento di $\mathbb{H}$. Si ponga

$$\tau(h) = (\overline{z}, -w)\,.$$

Si mostri che τ è un antiautomorfismo, nel senso che è una applicazione biunivoca di $\mathbb{H}$ in sè tale che

$$\begin{aligned} \tau(h+h') &= \tau(h) + \tau(h')\,, \\ \tau(hh') &= \tau(h')\tau(h)\,. \end{aligned}$$

Si mostri poi che

$$h\tau(h) = (|z|^2 + |w|^2, 0)\,;$$

ne segue, in particolare, che se $h \neq 0$ allora $h\tau(h)$ è un elemento non nullo e invertibile di $\mathbb{H}$. Se ne deduca che, sempre se $h \neq 0$,

$$\tau(h)(h\tau(h))^{-1}$$

è un inverso moltiplicativo di h. Dunque $\mathbb{H}$ è un anello di divisione. Si ponga poi

$$\mathbf{i} = (i, 0)\,, \quad \mathbf{j} = (0, 1)\,, \quad \mathbf{k} = (0, i)\,,$$

e si mostri che

$$\begin{aligned} &\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}\,, \\ &\mathbf{ij} = \mathbf{k}\,, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}\,, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}\,. \end{aligned}$$

Se ne deduca che

$$\mathbf{ji} = -\mathbf{k}\,, \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i}\,, \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j}\,,$$

e dunque, in particolare, che $\mathbb{H}$ non è un campo.

Sia ora A un anello di divisione. La nozione di spazio vettoriale (sinistro, per essere precisi) su A si definisce esattamente come per gli spazi vettoriali su un campo, e così pure la nozione di applicazione lineare. Come per gli spazi vettoriali su un campo, si può mostrare che ogni spazio vettoriale V finitamente generato su A ha una base finita, e che due qualsiasi basi hanno lo stesso numero di elementi, che viene detto *dimensione* di V, e indicato con $\dim_A V$, o più semplicemente con $\dim V$. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita su A, $\mathbb{P}V$ si costruisce esattamente come nel caso in cui A è un campo. Come in quel caso si mostra che $\mathbb{P}V$, insieme alla famiglia dei suoi sottinsiemi della forma $\mathbb{P}W$, dove W è un sottospazio vettoriale di V, è uno spazio proiettivo astratto.

Sia ora $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo astratto. Diremo che $\mathbb{P}$ è *desarguesiano* se per ogni cappia di triangoli prospettici in $\mathbb{P}$ vale la tesi del teorema di Desargues. Questo teorema dice quindi che ogni spazio proiettivo di dimensione 3 o più, o di dimensione 2 e immergibile in uno di dimensione 3 o più, è desarguesiano. Ne segue in particolare che i piani proiettivi della forma $\mathbb{P}V$ sono desarguesiani, in quanto V è sicuramente sottospazio di uno spazio vettoriale di dimensione superiore. Il seguente notevole teorema dice che vale anche il viceversa.

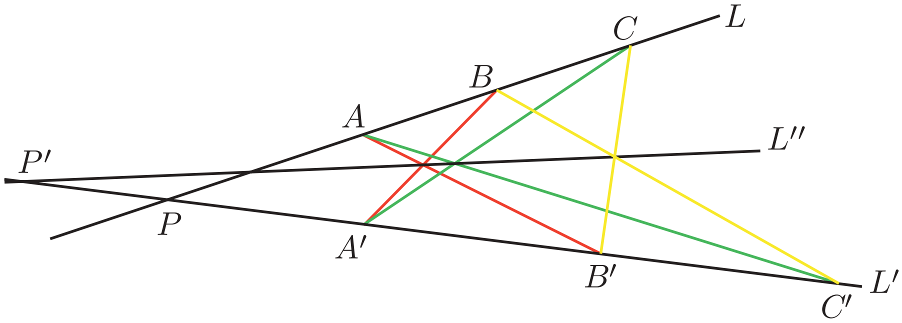
Teorema (6.5). *Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo astratto di dimensione almeno 2. Se $\mathbb{P}$ è desarguesiano vi è una collineazione tra $\mathbb{P}$ e uno spazio proiettivo della forma $\mathbb{P}V$, dove V è uno spazio vettoriale di dimensione finita su un anello di divisione.*

In particolare ogni spazio proiettivo astratto di dimensione almeno 3 è della forma $\mathbb{P}V$. Si possono invece costruire piani proiettivi astratti che non sono desarguesiani. Per questi esempi, come anche per una dimostrazione del Teorema (6.5), rimandiamo a [4] o a [3].

È anche possibile caratterizzare geometricamente quegli spazi proiettivi che sono della forma $\mathbb{P}V$, dove V è uno spazio vettoriale su un *campo*. Cominciamo coll'enunciare e dimostrare il classico teorema di Pappo; dati due punti distinti P e Q in uno spazio proiettivo indicheremo con $\overline{PQ}$ la retta che li contiene.

Teorema (6.6) (Teorema di Pappo). *Sia $\mathbb{P}V$ un piano proiettivo sul campo K, e siano L e L' due rette distinte in $\mathbb{P}V$. Siano A, B, C, A', B', C' punti distinti di $\mathbb{P}V$, i primi tre appartenenti a L e gli altri tre a L'. Siano P_1, P_2, P_3 i punti di intersezione di $\overline{AB'}$ e $\overline{A'B}$, di $\overline{AC'}$ e $\overline{A'C}$, e di $\overline{BC'}$ e $\overline{B'C}$, rispettivamente. Allora P_1, P_2 e P_3 sono allineati.*

Indichiamo con P il punto di intersezione di L e L'. Se uno tra i punti A, B, C, A', B', C' è uguale a P, due tra i punti P_1, P_2 e P_3 coincidono, quindi non c'è nulla da dimostrare. In caso contrario indichiamo con L'' la retta per P_1 e P_2. Indichiamo anche con P' il punto di intersezione di L' e L''.



Sia α' la prospettività di centro A' da L a L'' e sia α'' la prospettività di centro A da L'' a L'; poniamo $\alpha = \alpha'' \circ \alpha'$. Analogamente indichiamo con β' la prospettività di centro B' da L a L'', con β'' la prospettività di centro B da L'' a L' e poniamo $\beta = \beta'' \circ \beta'$. Notiamo che $\alpha(A) = A' = \beta(A)$, $\alpha(B) = B' = \beta(B)$ e $\alpha(P) = P' = \beta(P)$. Per il Teorema (4.6) se ne deduce che $\alpha = \beta$, e in particolare che $\alpha(C) = \beta(C)$. D'altra parte $\alpha(C) = C'$, mentre $\beta(C)$ è costruito come segue. Si traccia la retta per C e B' e si indica con Q il suo punto di intersezione con L''. Si traccia poi la retta per B e Q: il punto $\beta(C)$ è il punto di intersezione di questa retta con L'. Affermare che $\beta(C) = C'$ equivale dunque a dire che Q è il punto di intersezione di $\overline{BC'}$ e $\overline{B'C}$, cioè P_3. Dato che Q è allineato con P_1 e P_2 per costruzione, questo conclude la dimostrazione del teorema.

Un piano proiettivo astratto $\mathbb{P}$ sarà detto *pappiano* se, per ogni scelta di rette L, L' e punti A, B, C, A', B', C' in $\mathbb{P}$ come nell'enunciato del teorema di Pappo (6.6), vale la conclusione del teorema di Pappo stesso. Più in generale, uno spazio proiettivo astratto sarà detto pappiano se ogni suo piano lo è. Vale il seguente notevole risultato, per il quale, al solito, si rimanda a [4] o [3].

Teorema (6.7). *Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo astratto di dimensione almeno 2. Se $\mathbb{P}$ è pappiano esiste una collineazione tra di esso e uno spazio proiettivo della forma $\mathbb{P}V$, dove V è uno spazio vettoriale su un campo.*

Esercizio (6.8). Dove interviene nella dimostrazione di (6.6) la commutatività di K?