Spazi normati localmente compatti

Maurizio Cornalba

14/5/2015

Sia V uno spazio vettoriale su K, dove $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$. Una *norma* su V è una funzione $\| \; \| : V \to \mathbb{R}_+$ tale che:

$i.$ $\|v\| = 0$ se e solo se $v = 0$

$ii.$ $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ per ogni $\lambda \in K$ e ogni $v \in V$

$iii.$ $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ per ogni $v, w \in V$ (disuguaglianza triangolare)

Uno *spazio normato* è uno spazio vettoriale munito di una norma. Ogni spazio normato diventa uno spazio metrico con la distanza

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

In uno spazio normato le operazioni di spazio vettoriale sono continue. Infatti

$$\|v + w - (v' + w')\| \leq \|v - v'\| + \|w - w'\|$$

quindi l'operazione somma $V \times V \to V$ è Lipschitziana. D'altra parte

$$\|\lambda v - \mu w\| \leq \|\lambda v - \lambda w\| + \|\lambda w - \mu w\| = |\lambda|\|v - w\| + |\lambda - \mu|\|w\|$$

e il termine di destra di questa disuguaglianza tende chiaramente a zero per $(\lambda, v) \to (\mu, w)$. Quindi l'operazione prodotto $K \times V \to V$ è continua.

Lemma 1. *Siano V e W spazi normati e sia $\alpha : V \to W$ una applicazione lineare. Allora α è continua se e solo se esiste una costante $C \geq 0$ tale che*

$$\|\alpha(v)\| \leq C\|v\|$$

per ogni $v \in V$.

Dimostrazione. Se esiste una costante C con la proprietà indicata la funzione α è chiaramente Lipschitziana, e quindi continua. Viceversa, se supponiamo α continua esiste un numero positivo r tale che

$$\alpha(B(0, r)) \subset B(0, 1)$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni $v \in V$ non nullo il vettore $w = (r - \varepsilon)v/\|v\|$ appartiene a $B(0, r)$ e quindi

$$1 > \|\alpha(w)\| = \frac{r - \varepsilon}{\|v\|}\|\alpha(v)\|$$

Ne segue che

$$\|\alpha(v)\| \leq \frac{1}{r}\|v\|$$

□

Due norme $\| \; \|_1$ e $\| \; \|_2$ su uno stesso spazio vettoriale V sono dette *equivalenti* se esistono costanti C_1 e C_2 tali che

$$\|v\|_1 \leq C_1\|v\|_2 \, ; \quad \|v\|_2 \leq C_2\|v\|_1$$

per ogni $v \in V$. Ciò equivale a dire che l'applicazione identità tra gli spazi normati $(V, \| \; \|_1)$ e $(V, \| \; \|_2)$ è un omeomorfismo. Una applicazione $V \to W$ tra spazi normati è detta un *omomorfismo* di spazi normati se è lineare e continua. Un omomorfismo è detto un *isomorfismo* di spazi normati se è biunivoco e ha inversa continua.

Lemma 2. *Sia V uno spazio vettoriale normato di dimensione finita su K, e sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di V. L'applicazione $\alpha : K^n \to V$ data da $\alpha(a_1, \ldots, a_n) = \sum a_i v_i$ è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. L'applicazione α è continua perché le operazioni in V sono continue. Inoltre è un isomorfismo di spazi vettoriali. Consideriamo su $W = K^n$ una delle varie norme equivalenti (ad esempio quella euclidea) che inducono la topologia prodotto su W stesso. Il bordo della palla unitaria in W è compatto, e quindi lo stesso è vero per la sua immagine T. Dato che $0 \notin T$, la distanza M di T dall'origine è strettamente positiva. Quindi se $0 \neq w \in W$,

$$\|\alpha(w)\| = \|w\|\|\alpha(w/\|w\|)\| \geq M\|w\|$$

o anche, scrivendo $w = \alpha^{-1}(v)$,

$$\|\alpha^{-1}(v)\| \leq \frac{1}{M}\|v\|$$

Dunque α^{-1} è continua. □

Corollario 1. *Siano V e W spazi normati, reali o complessi, e supponiamo che V abbia dimensione finita. Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare. Allora f è continua.*

Dimostrazione. Sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di V e sia $\alpha : K^n \to V$ come nella dimostrazione del lemma precedente. Poniamo $w_i = f(v_i)$ e $\beta(a_1, \ldots, a_n) = \sum a_i w_i$. L'applicazione $\beta : K^n \to W$ è lineare e continua e $\beta = f \circ \alpha$. Dunque $f = \beta \circ \alpha^{-1}$ è continua in quanto composizione di applicazioni continue. □

Corollario 2. *Sia V uno spazio normato e sia W un suo sottospazio di dimensione finita. Allora W è chiuso in V.*

Dimostrazione. Se ci fosse un vettore v appartenente alla chiusura di W ma non a W lo stesso sarebbe vero anche nello spazio vettoriale U generato da W e da v. Una base di U è $u_1, \ldots, u_n$, dove $u_1, \ldots, u_{n-1}$ è una base di W e $u_n = v$. Ogni elemento $u \in U$ si scrive in modo unico sotto la forma $\sum a_i u_i$ e l'applicazione $f : U \to K$ data da $f(u) = a_n$ è lineare, quindi continua. Dunque $W = f^{-1}(0)$ è chiuso, contro quanto si era supposto. □

Ricordiamo che uno spazio topologico si dice *localmente compatto* se ogni suo punto ha un intorno compatto. Dire che uno spazio normato V è localmente compatto equivale a dire che esiste una palla chiusa di centro l'origine che è compatta, e quindi che tutte le palle chiuse in V sono compatte; in particolare V è completo.

Teorema 1. *Sia V uno spazio vettoriale normato, reale o complesso. Allora V è localmente compatto se e solo se ha dimensione finita.*

Dimostrazione. Se V ha dimensione finita è omeomorfo a K^n e quindi localmente compatto. Se V non ha dimensione finita mostreremo che non è localmente compatto costruendo una successione di elementi di V di norma 1 senza sottosuccessioni di Cauchy e quindi senza sottosuccessioni convergenti. Più esattamente costruiremo induttivamente elementi $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ tali che $\|v_i\| = 1$ e $\|v_i - v_j\| \geq 1$ se $i \neq j$. Scegliamo come v_1 qualsiasi vettore di norma 1. Supponiamo di aver già costruito $v_1, \ldots, v_{n-1}$ e indichiamo con W il sottospazio che essi generano. Esiste un elemento $v \in V$ non appartenente a W. Indichiamo con λ la distanza di v da W e notiamo che $\lambda > 0$ dato che W è chiuso. Inoltre se $\|w\| > 2\|v\|$ allora $\|v - w\| > \|v\| \geq \lambda$. Dato che $\overline{B(0, 2\|v\|)}$ è compatto la funzione $w \mapsto \|v - w\|$ ha minimo in un punto $w_0 \in \overline{B(0, 2\|v\|)}$. Per quanto osservato $\lambda = \|v - w_0\| \leq \|v - w\|$ per ogni $w \in W$. Poniamo $v_n = (v - w_0)/\|v - w_0\| = (v - w_0)/\lambda$. Allora

$$\|v_n - v_i\| = \frac{1}{\lambda}\|v - w_0 - \lambda v_i\| \geq \frac{1}{\lambda}\lambda = 1$$

per ogni $i < n$, dato che $w_0 + \lambda v_i \in W$. $\square$