Funzioni simmetriche

Maurizio Cornalba

9/3/2012

Sia A un anello commutativo, e siano $X_1, X_2, \dots, X_n$ indeterminate su A. Per ogni multiindice $J = (j_1, \dots, j_h)$ poniamo

$$X^J = \prod_{i=1}^{h} X_i^{j_i} = X_1^{j_1} X_2^{j_2} \cdots X_h^{j_h}$$

Il *grado* del *monomio* X^J è $\sum j_i$. Ogni polinomio nelle X a coefficienti in A si scrive in modo unico sotto la forma

$$\sum_J a_J X^J$$

dove gli a_J sono elementi di A, tutti nulli salvo che per un numero finito di multiindici J. Il grado di un tale polinomio è il massimo dei gradi dei monomi X^J tali che $a_J \neq 0$.

Un polinomio $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ si dice *simmetrico* se

$$P(X_{\tau(1)}, X_{\tau(2)}, \dots, X_{\tau(n)}) = P(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

per ogni permutazione $\tau \in S_n$. I polinomi simmetrici vengono chiamati anche *funzioni simmetriche*. È chiaro che somme e prodotti di polinomi simmetrici sono simmetrici; dunque le funzioni simmetriche costituiscono un sottoanello di $A[X_1, \dots, X_n]$. I seguenti polinomi sono simmetrici e vengono chiamati *funzioni simmetriche elementari*:

$$\begin{aligned}
\sigma_0(X_1, \dots, X_n) &= 1 \\
\sigma_1(X_1, \dots, X_n) &= \sum_j X_j \\
\sigma_2(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{j_1 < j_2} X_{j_1} X_{j_2} \\
&\dots \\
\sigma_i(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_i} X_{j_1} X_{j_2} \cdots X_{j_i} \\
&\dots \\
\sigma_n(X_1, \dots, X_n) &= X_1 \cdots X_n
\end{aligned}$$

Lemma 1. *Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ elementi di un anello commutativo B e sia X una indeterminata su B. Allora*

$$\prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i) = \sum_{h=0}^{n} (-1)^h \sigma_h(\alpha_1, \dots, \alpha_n) X^{n-h}$$

in $B[X]$.

Dimostrazione. Svolgendo il prodotto $\prod(X - \alpha_i)$ si ottiene una somma di prodotti di n termini, l'i-esimo dei quali è X o $-\alpha_i$. In altre parole, $\prod(X - \alpha_i)$ è somma di termini del tipo $X^{n-h}(-\alpha_{i_1}) \cdots (-\alpha_{i_h}) = (-1)^h X^{n-h} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_h}$ con $i_1 < \dots < i_h$. Da qui la tesi. $\square$

Teorema 1. *L'anello delle funzioni simmetriche in* $A[X_1, \ldots, X_n]$ *è* $A[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$*; in altre parole, ogni funzione simmetrica è un polinomio nelle funzioni simmetriche elementari, e viceversa. Inoltre* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ *sono algebricamente indipendenti su* A*.*

Dimostrazione. È chiaro che ogni elemento di $A[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ è una funzione simmetrica. Viceversa, sia F una funzione simmetrica. Dobbiamo mostrare che F è esprimibile come un polinomio in $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Scriviamo $F = \sum F_h$, dove F_h è la componente omogenea di grado h di F, cioè la somma di tutti i monomi di grado h che compaiono in F. È chiaro che gli F_h sono polinomi simmetrici. Nella dimostrazione possiamo quindi supporre che F sia omogeneo, cioè somma di monomi tutti dello stesso grado. Se $I = (i_1, \ldots, i_n)$ e $J = (j_1, \ldots, j_n)$ sono multiindici diremo che I è maggiore di J, e scriveremo $I > J$, se c'è h tale che $i_\ell = j_\ell$ per ogni $\ell < h$ e $i_h > j_h$. In questo caso diremo anche che il monomio X^I è maggiore di X^J e scriveremo $X^I > X^J$. Notiamo che, se X^H è un altro monomio, $X^H X^I = X^{H+I} > X^{H+J} = X^H X^J$. Ne segue che, se $X^K > X^H$, allora $X^K X^I > X^H X^J$.

Ora sia X^K, $K = (k_1, \ldots, k_n)$, il massimo monomio che compare (con coefficiente non nullo) in F. Dato che F è simmetrico, in F compaiono anche tutti i monomi X^{K_τ}, dove τ è una permutazione e $K_\tau = (k_{\tau_1}, \ldots, k_{\tau_n})$. Quindi $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n$. È chiaro che il massimo monomio che compare in σ_i è $X_1 \cdots X_i$. Il massimo monomio che compare in $\sigma_1^{d_1} \cdots \sigma_n^{d_n}$ è il prodotto dei massimi monomi dei fattori, ed è quindi X^J, $J = (j_1, \ldots, j_n)$, dove $j_i = d_i + d_{i+1} + \cdot + d_n$. Se poniamo $d_1 = k_1 - k_2$, $d_2 = k_2 - k_3$, $\ldots$, $d_n = k_n$, allora $d_i + \cdots + d_n = k_i$, e quindi il massimo monomio che compare in $\sigma_1^{d_1} \cdots \sigma_n^{d_n}$ è X^K. Ne segue che il massimo monomio che compare in $F - a_K \sigma_1^{d_1} \cdots \sigma_n^{d_n}$ è strettamente minore di X^K. Iterando questo procedimento si conclude che F è una combinazione lineare di monomi nelle funzioni simmetriche elementari, cioè un polinomio nelle funzioni simmetriche elementari. Questo dimostra la prima delle affermazioni del teorema.

Ora mostriamo che le funzioni simmetriche elementari sono algebricamente indipendenti. Ragioniamo per assurdo supponendo che ci sia un polinomio non nullo $P(X_1, \ldots, X_n) = \sum a_I X^I$ tale che $P(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0$. Per ogni multiindice $D = (d_1, \ldots, d_n)$ definiamo un altro multiindice $K(D) = (k_1, \ldots, k_n)$ ponendo $k_i = d_i + \cdots + d_n$. Il massimo monomio che compare in $\sigma_1^{d_1} \cdots \sigma_n^{d_n}$ è $X^{K(D)}$. Notiamo che se $K(D) = K(D')$ allora $D = D'$. Sia D il multiindice, tra quelli per cui $a_D \neq 0$, per cui $X^{K(D)}$ ha grado massimo ed è massimo. Per quanto si è osservato, il monomio $X^{K(D)}$ compare in $P(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ con coefficiente a_D, il che è assurdo. □

Definiamo nuove funzioni simmetriche $p_1, p_2, \ldots$ ponendo

$$p_k(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^k \,.$$

È importante osservare che, come del resto le funzioni simmetriche elementari σ_i, le p_i godono della proprietà che $p_i(X_1, \ldots, X_h, 0, \ldots, 0) = p_i(X_1, \ldots, X_h)$.

Proposizione 1 (Identità di Newton)**.** *Per ogni intero* $k > 0$

$$\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \sigma_i p_{k-i} + (-1)^k k \sigma_k = 0 \,.$$

Dimostrazione. Per $k = n$ basta sommare, al variare di j, le identità

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_i(X_1, \ldots, X_n) X_j^{n-i} = 0 \,.$$

Per $k > n$ ci si riduce al caso precedente ponendo $X_{n+1} = \cdots = X_k = 0$ nell'identità di Newton per $k = n$. Resta da trattare il caso $k < n$. Ci serve la seguente osservazione.

Lemma 2. *Sia $f(X_1, \ldots, X_n)$ una funzione simmetrica omogenea di grado k tale che*

$$f(X_1, \ldots, X_{k-1}, 0, \ldots, 0) = 0\,.$$

Allora f è un multiplo di σ_k.

La dimostrazione del lemma è semplice. Per il teorema 1, $f = h\sigma_k + P(\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1})$, dove P è un polinomio. Quindi $0 = f(X_1, \ldots, X_{k-1}, 0, \ldots, 0) = P(\sigma_1(X_1, \ldots, X_{k-1}), \ldots, \sigma_{k-1}(X_1, \ldots, X_{k-1}))$. Dato che le funzioni simmetriche elementari sono algebricamente indipendenti, sempre per il teorema 1, questo implica che il polinomio P è nullo.

Possiamo ora concludere la dimostrazione della proposizione 1. Poniamo $f = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \sigma_i p_{k-i}$. L'identità di Newton per $n = k-1$ ci dice che $f(X_1, \ldots, X_{k-1}, 0, \ldots, 0) = 0$, e quindi il lemma appena dimostrato ci assicura che f è un multiplo di σ_k. La costante di proporzionalità è $(-1)^{k-1}k$, come risulta dall'identità di Newton per $k = n$, che dà

$$f(X_1, \ldots, X_k, 0, \ldots, 0) = (-1)^{k-1} k \sigma_k(X_1, \ldots, X_k, 0, \ldots, 0)\,.$$

□

Osserviamo che l'identità di Newton, al variare di k, permette di esprimere ricorsivamente le p_i in funzione delle σ_i e viceversa. Per esempio abbiamo

$$\begin{aligned}
p_1 &= \sigma_1 \\
p_2 &= \sigma_1 p_1 - 2\sigma_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\
p_3 &= \sigma_1 p_2 - \sigma_2 p_1 + 3\sigma_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_2\sigma_1 + 3\sigma_3
\end{aligned}$$

e reciprocamente

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= p_1 \\
\sigma_2 &= \frac{1}{2}p_1^2 - \frac{1}{2}p_2 \\
\sigma_3 &== \frac{1}{6}p_1^3 - \frac{1}{2}p_1 p_2 + \frac{1}{3}p_3
\end{aligned}$$