Prove di esame e altri esercizi di Geometria I 1999–2000

Prova scritta del 21 aprile 1999

1) Sia V il sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ di equazioni

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Sia L la retta passante per i punti $(1,1,1,1)$ e $(1,3,1,3)$, e sia W il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^4$ contenente V e L.
   a) Calcolare la dimensione di V;
   b) Calcolare la dimensione di W;
   c) Dare equazioni cartesiane e parametriche per W.

2) Sia A una matrice reale $n \times n$.
   a) Si mostri che se A è diagonalizzabile, anche A^2 è diagonalizzabile e ha autovalori tutti non negativi;
   b) È vero il viceversa di a)?
   c) Si mostri che, se A è diagonalizzabile ed ha autovalori tutti non negativi, allora c'è una matrice reale B tali che $A = B^2$.

3) Poniamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$V = \{X \in M_{\mathbb{R}}(2) : X = {}^tX\}$$

e sia $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$\varphi(X,Y) = Tr(XAY)\,.$$

   a) Mostrare che φ è una forma bilineare simmetrica;
   b) Determinare una base di V rispetto alla quale la matrice di φ risulti come nella tesi del teorema di Sylvester, ricavandone la segnatura di φ e classificando φ in base ad essa;
   c) Determinare l'insieme dei vettori isotropi rispetto a φ, stabilendo se esso è un sottospazio di V;
   d) Sia U il sottospazio generato da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Determinare il complemento ortogonale di U rispetto a φ e stabilire se esso è in somma diretta con U.

Prova scritta del 31 maggio 1999

4) Dire per quali valori reali del parametro t i tre piani in $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$\begin{aligned}&x+(t-1)y+(t-2)z=3\,,\\&x+y+2z=1\,,\\&tx+y+z=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

hanno punti in comune; dire anche quanti sono i punti in comune. La risposta è diversa se si cercano i valori complessi del parametro t per i quali i tre piani in $\mathbb{C}^3$ definiti da queste stesse equazioni hanno punti in comune?

5) Sia

$$A=\begin{pmatrix}6&23&-8\\-2&-9&3\\0&-4&1\end{pmatrix}$$

a) Calcolare autovalori e autovettori di A.
b) Mostrare che A non è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

6) Sia $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un endomorfismo, associato rispetto alla base canonica alla matrice A. Sia $\varphi:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$\varphi(u,v)=\langle T(u),T(v)\rangle\,,$$

dove $\langle\ ,\ \rangle$ è la forma bilineare simmetrica standard su $\mathbb{R}^3$.
a) Dimostrare che φ è una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$.
b) Stabilire una condizione necessaria e sufficiente affinché φ non sia degenere.
c) Dimostrare che quando φ non è degenere è definita positiva.
d) Nel caso in cui

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},$$

determinare una nuova base rispetto alla quale φ sia associata ad una matrice diagonale.

7) Mostrare che la matrice

$$A=\begin{pmatrix}2&5&3\\-1&-3&-2\\0&1&1\end{pmatrix}$$

è nilpotente e ridurla a forma canonica di Jordan.

Prova scritta del 23 giugno 1999

8) Sia A la matrice complessa
$$A = \begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 2-i & 2+i \end{pmatrix}$$
   a) Mostrare che A è normale.
   b) Diagonalizzare A tramite una trasformazione unitaria.

9) Sia A una matrice complessa $n \times n$ tale che $A^3 = A$.
   a) Quali sono i possibili polinomi minimi per A?
   b) Si mostri che A è sempre diagonalizzabile.
   c) Sia D una matrice diagonale simile ad A. Per $n = 4$ descrivere tutti i casi possibili per D, e in ognuno di essi determinare polinomio caratteristico e polinomio minimo di A.

10) Si considerino i vettori in $\mathbb{R}^4$
$$\begin{array}{ccc} v_1 = (2,-1,-1,0) & v_2 = (7,1,-5,3) & v_3 = (-1,2,0,1) \\ w_1 = (2,-1,1,2) & w_2 = (0,1,1,2) & w_3 = (2,-4,-2,-4) \\ P = (1,1,-1,-1) & & Q = (2,1,3,-1) \end{array}$$
e i sottinsiemi di $\mathbb{R}^4$
$$A = \{P + t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3 : t_1,t_2,t_3 \in \mathbb{R}\}$$
$$B = \{Q + t_1w_1 + t_2w_2 + t_3w_3 : t_1,t_2,t_3 \in \mathbb{R}\}$$
   a) Si mostri che A e B sono sottospazi affini di $\mathbb{R}^4$ e se ne calcoli la dimensione.
   b) Trovare l'intersezione di A e B e il più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ contenente sia A che B.

11) Per ogni matrice quadrata M indicheremo con $\Sigma(M)$ la somma degli elementi di M. Poniamo
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad V = \{X \in M_{\mathbb{R}}(3) : X = -\,{}^tX\}$$
e sia $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da
$$\varphi(X,Y) = \Sigma(XAY)\,.$$
   a) Mostrare che φ è una forma bilineare simmetrica;
   b) Determinare la segnatura di φ;
   c) Sia U il sottospazio di V generato da
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mostrare che il complemento ortogonale di U rispetto a φ è in somma diretta con U e dire se su di esso φ è positiva definita.

Prova scritta del 1 ottobre 1999

12) Dire per quali valori del parametro t i due piani A e B nello spazio affine reale tridimensionale di equazioni

$$(1-t)x_1 + 2x_2 - tx_3 = t$$

e

$$x_1 - tx_2 + 2x_3 = 1$$

sono paralleli. Per ogni altro valore di t trovare una rappresentazione parametrica di $A \cap B$.

13) Diagonalizzare la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per mezzo di una trasformazione unitaria. È possibile fare altrettanto per mezzo di una trasformazione ortogonale (cioè unitaria reale)?

14) Sia A una matrice complessa 3×3. Supponiamo che il polinomio caratteristico di A sia

$$P(X) = X^3 - 5X^2 - (t^2 - 2t - 7)X + t^2 - 2t - 3\,,$$

dove t è un numero complesso. Dire per quali valori di t la matrice A è diagonalizzabile. Per i rimanenti valori di t dire quali sono le forme canoniche di Jordan possibili per A. (Suggerimento: notare che 1 è sempre una radice di P)

15) Sia V_n lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado al più n. Indichiamo con P_n e D_n i sottospazi di V_n costituiti, rispettivamente, da tutti i polinomi che sono somma di monomi di grado pari e da quelli che sono somma di monomi di grado dispari. Se R e S sono due polinomi poniamo

$$\varphi(R,S) = \int_{-1}^{1} R(x)S(x)x dx\,.$$

a) Si mostri che φ è una forma bilineare simmetrica su V_n;
b) Si calcoli la segnatura di φ per $n = 2, 3$;
c) Si mostri che P_n è un sottospazio isotropo massimale (cioè non contenuto propriamente in altri sottospazi isotropi) e che anche D_n lo è per n dispari;
d) Si calcoli la segnatura di φ per ogni n.

Prova scritta del 28 ottobre 1999

16) Per ogni valore reale del parametro t trovare la dimensione dell'intersezione dei tre piani in $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$\begin{aligned}
&(1+2t)x + ty + z = 1\\
&(1+t)x + ty + (1+t)z = 2\\
&(1+2t)x + (1+t)y + z = -1
\end{aligned}$$

e trovarne una rappresentazione parametrica.

17) Diagonalizzare per mezzo di una trasformazione unitaria la matrice complessa

$$A = \begin{pmatrix} i & i & 0 \\ i & i & i \\ 0 & i & i \end{pmatrix}$$

(Suggerimento: mostrare che i è un autovalore di A).

18) Ridurre a forma canonica di Jordan la matrice complessa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

19) Diagonalizzare la forma quadratica reale

$$Q(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 2yz$$

e determinarne la segnatura.

Prova scritta del 28 gennaio 2000

20) Si considerino i piani in $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$\begin{aligned}
tx + 2y + z &= 0\\
(1-t)x + y - z &= 0\\
x + 2ty + (2t+1)z &= 0
\end{aligned}$$

dove t è un parametro reale. Per ogni valore di t si trovi la dimensione dell'intersezione dei tre piani e una sua rappresentazione parametrica.

21) Mostrare che una matrice reale 2×2 è normale se e solo se è simmetrica o multipla di una matrice ortogonale.

22) Siano A, B e C matrici di dimensioni $n \times n$, $m \times m$ e $n \times m$ su un campo K. Siano P e Q i polinomi minimi di A e B. Poniamo

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

a) Si mostri che il polinomio minimo di M divide PQ.
b) Se ne deduca che, se A e B sono diagonalizzabili e P è primo con Q, allora anche M è diagonalizzabile.

23) Se $A = (a_{ij})$ è una matrice 2×2 poniamo $\mathbb{S}(A) = a_{12} + a_{21}$. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici complesse 2×2, e per ogni $A, B \in V$ poniamo

$$\varphi(A, B) = \mathbb{S}(AQ\,{}^t\!B)\,,$$

dove

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Mostrare che φ è una forma bilineare simmetrica su V.
b) Diagonalizzare la forma quadratica associata a φ.

Prova scritta del 18 febbraio 2000

24) Si mostri che le equazioni parametriche

$$\begin{aligned} a(t_1, t_2) &= (t_1 + 1, t_1 - t_2 + 1, t_2 + 1) \\ b(s_1, s_2) &= (s_1 + s_2 + 1, s_1 - s_2, -s_1) \end{aligned}$$

rappresentano due piani in $\mathbb{R}^3$. Si determini la dimensione della loro intersezione Λ e si dia di questa una rappresentazione parametrica. Si dica inoltre per quali valori del parametro T il piano Π di equazione

$$(1 - T)x - (1 + T)y - (1 - T)z = 2$$

non interseca Λ.

25) Dire quali delle seguenti matrici sono simili tra loro:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -8 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -8 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

26) Siano A e B matrici complesse $n \times n$. Si supponga che A abbia n autovalori distinti e che $A = B^2$. Si mostri che anche B ha n autovalori distinti.

27) Determinare la segnatura della forma quadratica reale

$$Q(x,y,z,t) = x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_3x_4$$

e ridurne la matrice alla forma data dal teorema di Sylvester.

Prova scritta del 31 maggio 2000

28) Per ogni valore reale del parametro t scrivere una equazione parametrica per l'intersezione dei due piani in $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$\begin{aligned} &x + y + z = t + 1 \\ &x + (1-2t)y + (1-2t)z = 0\,. \end{aligned}$$

29) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

e sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2. Si mostri che l'applicazione $T : V \to V$ definita da $T(M) = AMA^{-1}$ è lineare. Si trovino poi il polinomio minimo, gli autovalori e gli autovettori di T (suggerimento: notare che $A^2 = I$).

30) Sia U l'insieme delle matrici complesse 2×2, visto come spazio vettoriale complesso. Mostrare che

$$\langle A, B\rangle = Tr(A\,{}^t\overline{B})$$

è un prodotto scalare su U. Per ogni $A \in U$ poniamo $F(A) = {}^tA$. Mostrare che F è una applicazione lineare unitaria di U in sè e trovare una base ortonormale di U costituita da autovettori per F.

31) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita, e sia Q una forma bilineare simmetrica su V. Per ogni sottospazio W di V poniamo

$$W^\perp = \{v \in V : Q(v,w) = 0 \text{ per ogni } w \in W\}\,.$$

Si mostri che, se $W \cap W^\perp = \{0\}$ per ogni W, allora Q è definita positiva o definita negativa.

Prova scritta del 26 giugno 2000

32) Trovare equazioni per il più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ contenente le due rette con rappresentazioni parametriche

$$t \mapsto (1+3t, -2-t, 1+t, 2t)$$

e

$$t \mapsto (2-t, t, 2+2t, 1-2t)\,.$$

33) Dire se le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sono diagonalizzabili su $\mathbb{R}$ e se lo sono su $\mathbb{C}$.

34) Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$:

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3\,.$$

La forma bilineare associata è degenere o non degenere? Si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice della forma bilineare associata sia in forma di Sylvester.

35) Si considerino le matrici 3×3 reali

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trovare tutti i vettori colonna reali X tali che AX e BX siano proporzionali.

Prova scritta del 26 settembre 2000

36) Sia L la retta in $\mathbb{R}^4$ di equazione parametrica

$$t \mapsto (2+t, -2+t, -t, 1-t)\,.$$

Per ogni numero reale s indichiamo con P_s il luogo definito dalle equazioni

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ &x_1 - x_2 + x_3 + (1+s)x_4 = 1 \end{aligned}$$

Si mostri che P_s è un piano (cioè un sottospazio affine di dimensione 2) di $\mathbb{R}^4$ per ogni s. Per ogni s si trovi il più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ contenente sia L che P_s.

37) Sia V uno spazio vettoriale complesso e sia v_1, v_2, v_3 una sua base. Sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare la cui matrice, rispetto alla base data, è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1/2 - i \\ -2i & 2 & -i \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Poniamo
$$w_1 = v_2\,, \quad w_2 = v_2 + iv_1\,, \quad w_3 = v_1 - v_2 - 2v_3\,.$$

a) Mostrare che w_1, w_2, w_3 è una base di V.
b) Trovare la matrice di f rispetto alla base w_1, w_2, w_3.
c) Trovare gli autovalori di f e la loro molteplicità.

38) Per ogni vettore $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ poniamo
$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xz\,.$$
Si mostri che Q è una forma quadratica su $\mathbb{R}^3$. Si calcoli la segnatura della corrispondente forma bilineare simmetrica, e si riduca la matrice di quest'ultima a forma di Sylvester.

39) Dire quali di queste affermazioni sono vere e quali false:
a) La differenza di due matrici reali simmetriche $n \times n$ è una matrice simmetrica.
b) La differenza di due matrici reali simmetriche $n \times n$ definite positive è definita positiva.
c) Il prodotto di due matrici reali simmetriche $n \times n$ è una matrice simmetrica.

Prova scritta del 24 ottobre 2000

40) Per ogni valore reale di t dire se il sistema di equazioni lineari
$$\begin{aligned} &tx + (1-t)y - 2tz = 2\\ &x + ty + tz = 0\\ &2x + ty + tz = -t \end{aligned}$$
ha una, nessuna o infinite soluzioni.

41) Trovare polinomio caratteristico e polinomio minimo di
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -6\\ 0 & -1 & 0\\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$
Dire se A è diagonalizzabile o no.

42) Trovare tutte le matrici ortogonali 2×2 A tali che $AB = BA$, dove
$$B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

43) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 3×3 antisimmetriche (uguali cioè a meno la loro trasposta). Sia Q una matrice reale simmetrica 3×3. Per ogni coppia A, B di elementi di V poniamo
$$\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}(AQB)\,.$$

a) Si mostri che φ è una forma bilineare simmetrica su V.
b) Se

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si trovi una base di V rispetto alla quale la matrice di φ sia in forma di Sylvester e si determini la segnatura di φ.

Soluzioni

1) Gli iperpiani

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \qquad \text{e} \qquad x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

non sono paralleli, dato che la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ha rango due. Dunque la dimensione di V è $3 + 3 - 4 = 2$. Cerchiamo le intersezioni tra L e V. Una equazione parametrica per L è $x_1 = 1, x_2 = 1+2t, x_3 = 1, x_4 = 1+2t$. Sostituendo nelle equazioni di V si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} 2 + 1 + 2t + 1 + 1 + 2t &= 1 \\ 1 + 3 + 6t + 1 - 1 - 2t &= 0 \end{aligned}$$

che ha come unica soluzione $t = -1$. Vi è dunque un unico punto di intersezione tra V e L, ed è $(1, -1, 1, -1)$. Ne segue in particolare che la dimensione di W è $2+1 = 3$. Nel fascio generato dagli iperpiani $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ e $x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0$ cerchiamone uno che passi per $(1, 1, 1, 1)$; questo fornirà una equazione cartesiana per W. Dobbiamo trovare λ e μ in modo che $(1, 1, 1, 1)$ giaccia sull'iperpiano

$$\lambda(2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1) + \mu(x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4) = 0\,,$$

tali cioè che

$$\lambda(2 + 1 + 1 + 1 - 1) + \mu(1 + 3 + 1 - 1) = 0\,,$$

o anche che

$$4\lambda + 4\mu = 0\,.$$

Una soluzione è $\lambda = -\mu = 1$ (e tutte le altre le sono proporzionali). Dunque una equazione cartesiana per W è

$$x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 1\,.$$

Un vettore diretto come L è $(0, 2, 0, 2)$, mentre due vettori indipendenti e paralleli a V sono $(2, 1, -5, 0)$ e $(0, 1, -2, 1)$. Dunque una equazione parametrica per W è

$$(1, -1, 1, -1) + u_1(0, 2, 0, 2) + u_2(2, 1, -5, 0) + u_3(0, 1, -2, 1)\,.$$

2) Supponiamo che A sia diagonalizzabile, cioè che ci siano una matrice invertibile M e una matrice diagonale Δ tali che $A = M\Delta M^{-1}$. Allora $A^2 = M\Delta M^{-1}M\Delta M^{-1} = M\Delta^2 M^{-1}$. La matrice Δ^2 è diagonale e i suoi elementi diagonali sono i quadrati di

quelli corrispondenti di Δ; dunque A^2 è diagonalizzabili ed ha autovalori non negativi. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

non è diagonalizzabile perchè ha polinomio caratteristico X^2, e quindi zero come unico autovalore, ma non è nulla. Però $A^2 = 0$ è diagonalizzabile ed ha autovalori non negativi. Quindi b) ha risposta negativa. Sia ora A una matrice diagonalizzabile e con autovalori tutti non negativi. Scriviamo $A = M\Delta M^{-1}$, dove Δ è diagonale. Poiché gli elementi diagonali di Δ non sono negativi, sono dei quadrati di numeri reali. In altre parole vi è una matrice reale diagonale E tale che $\Delta = E^2$. Si conclude che $A = ME^2M^{-1} = MEM^{-1}MEM^{-1}$, e quindi che A è il quadrato di $B = MEM^{-1}$.

3) $\varphi(Y, X) = Tr(YAX) = Tr({}^t(YAX)) = Tr({}^tX\,{}^tA\,{}^tY) = Tr(XAY) = \varphi(X, Y)$.
$\varphi(I, I) = 2$, quindi se $X_1 = I/\sqrt{2}$, allora $\varphi(X_1, X_1) = 1$. Una matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

è ortogonale a X_1, cioè ortogonale a I, se e solo se $a + d - 2b = 0$. Una tale matrice è

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ora $\varphi(B, B) = 2$, e quindi $\varphi(X_2, X_2) = 1$, dove $X_2 = B/\sqrt{2}$. Una matrice simmetrica è ortogonale a X_1 e a X_2 se e solo se è un multiplo di

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che $X_3A = 0$, e quindi $\varphi(X_3, X) = 0$ per ogni X. Una base di V rispetto alla quale la matrice di φ è in forma di Sylvester è dunque X_1, X_2, X_3, e la segnatura di φ è $(2, 0, 1)$. Un elemento qualsiasi di V si scrive in modo unico sotto la forma $X = \sum a_iX_i$, e $\varphi(X, X) = a_1^2 + a_2^2$. Dunque X è isotropo se e solo se è multiplo di X_3; l'insieme dei vettori isotropi è dunque un sottospazio vettoriale di V di dimensione 1. Poiché

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è ortogonale a ogni $X \in V$, il complemento ortogonale di U è l'ortogonale di

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cioè l'insieme di tutte le matrici

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

tali che $a = b$. Questo spazio ha dimensione 2 e quindi non è in somma diretta con U.

4) Si tratta di decidere per quali valori di t il sistema formato dalle equazioni dei tre piani ha soluzioni. La matrice del sistema omogeneo associato e la matrice completa del sistema sono, rispettivamente

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t-1 & t-2 \\ 1 & 1 & 2 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 1 & t-1 & t-2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ t & 1 & 1 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ammette soluzioni se e solo se $A(t)$ e $B(t)$ hanno lo stesso rango. Ora $\det(A(t)) = t^2 - 2$, e quindi $A(t)$ ha rango 3 se $t \neq \pm\sqrt{2}$. Dato che il rango di $B(t)$ è maggiore o uguale di quello di $A(t)$ e non supera 3, per $t \neq \pm\sqrt{2}$ il sistema ha soluzioni; vi è anzi un'unica soluzione dato che ognuna di esse è somma di una soluzione particolare e di una del sistema omogeneo associato, e d'altra parte quest'ultimo ha come unica soluzione $(0, 0, 0)$. Notiamo anche che in ogni caso $A(t)$ ha rango almeno 2, dato che contiene il minore a determinante non nullo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Restano i casi in cui $t = \pm\sqrt{2}$. Per $t = \sqrt{2}$ la matrice $A(t)$ si riduce a

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}-2 \\ 1 & 1 & 2 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se indichiamo con A_1, A_2, A_3 le tre righe di $A(\sqrt{2})$, si ha la relazione di dipendenza lineare $\sqrt{2}A_1 + \sqrt{2}A_2 - 2A_3 = 0$ e ogni altra relazione tra le righe è multipla di questa, dato che il rango di $A(\sqrt{2})$ è 2. Il rango di $B(\sqrt{2})$ è 2 dato che la stessa relazione di dipendenza lineare vale tra gli elementi della sua ultima colonna. Infatti $3\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2 \cdot 2\sqrt{2} = 0$. Vi sono dunque in questo caso infiniti punti di intersezione, e precisamente una intera retta di punti di intersezione, corrispondenti alle soluzioni del sistema omogeneo associato, che variano in uno spazio vettoriale di dimensione $3 - \text{rango}(A(\sqrt{2})) = 1$.
Per $t = -\sqrt{2}$ la discussione è simile. Si ha che

$$A(-\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2}-1 & -\sqrt{2}-2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se indichiamo con A_1, A_2, A_3 le tre righe di $A(\sqrt{2})$, ogni relazione di dipendenza lineare tra di esse è multipla di $\sqrt{2}A_1 + \sqrt{2}A_2 + 2A_3 = 0$. Questa relazione non vale però per gli elementi dell'ultima colonna di $B(-\sqrt{2})$, dato che $3\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$. Quindi $B(-\sqrt{2})$ ha rango 3 e i tre piani non hanno punti di intersezione per $t = -\sqrt{2}$.

La discussione appena conclusa vale, senza modifiche, sia che il campo base sia $\mathbb{R}$, sia che sia $\mathbb{C}$.

5) Il polinomio caratteristico di A è

$$P(t) = \det(tI - A) = t^3 + 2t^2 + t = t(t^2 + 2t + 1) = t(t+1)^2 .$$

Quindi gli autovalori di A sono 0, con molteplicità 1, e -1, con molteplicità 2. Per calcolare gli autovettori relativi a 0 bisogna risolvere il sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} 6 & 23 & -8 \\ -2 & -9 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Si calcola immediatamente che ogni soluzione è multipla di

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} .$$

Per calcolare gli autovettori relativi a -1 bisogna risolvere il sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} 6 & 23 & -8 \\ -2 & -9 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} .$$

Si calcola immediatamente che ogni soluzione è multipla di

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Dunque la molteplicità "geometrica" dell'autovalore -1 è strettamente minore della molteplicità "algebrica". Ne segue che A non è diagonalizzabile su alcun sovracampo di $\mathbb{Q}$, in particolare su $\mathbb{C}$.

6) Se $0 = \langle T(u), T(u) \rangle = \|T(u)\|^2$, allora $T(u) = 0$; se T è iniettivo, ne segue che $u = 0$. Quindi, se T è iniettivo, allora φ è non degenere. Viceversa, se T non è iniettivo, c'è $u \neq 0$ tale che $T(u) = 0$. Ne segue che, per ogni v, $\varphi(u, v) = \langle T(u), T(v) \rangle = \langle 0, T(v) \rangle = 0$, e quindi che φ è degenere.
Se φ è non degenere, cioè se T è iniettivo, $\varphi(u, u) = \langle T(u), T(u) \rangle = \|T(u)\|^2 > 0$ per ogni $u \neq 0$.
La matrice A è simmetrica; in particolare è diagonalizzabile per mezzo di una trasformazione ortogonale. Il polinomio caratteristico di A è $t^3 - 3t^2 + 2t = t(t^2 - 3t + 2) = t(t-1)(t-2)$, quindi gli autovalori di A sono $0, 1, 2$, tutti con molteplicità 1. Si calcola

immediatamente che gli autovettori relativi a questi tre autovalori sono tutti multipli, nell'ordine, dei vettori

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questi vettori sono ortogonali tra loro rispetto al prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$, come segue dal fatto che A è simmetrica o per verifica diretta. Dato che $Tv_i = iv_i$, ne segue che

$$\varphi(v_i, v_j) = \langle iv_i, jv_j \rangle = ijc_i\delta_{i,j}\ ,$$

dove $c_0 = \langle v_0, v_0 \rangle = 2 = \langle v_2, v_2 \rangle = c_2$ e $c_1 = \langle v_1, v_1 \rangle = 1$. Dunque la matrice di φ rispetto alla base v_0, v_1, v_2 è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

7)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi A è nilpotente. Poniamo

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

e indichiamo con V_1 lo spazio degli X tali che $AX = 0$ e con V_2 lo spazio degli X tali che $A^2X = 0$. Poniamo anche $V_3 = \mathbb{C}^3$. Allora $X \in V_2$ se e solo se $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$, e quindi una base di V_3 modulo V_2 è data ad esempio da

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Poi

$$v_2 = Av_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = Av_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

I vettori v_1, v_2, v_3 sono una base di $\mathbb{C}^3$ rispetto alla quale la matrice della applicazione lineare $X \mapsto AX$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In altre parole, se M è la matrice le cui colonne sono v_1, v_2, v_3, allora

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8)

$${}^t\overline{A}A = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = A\,{}^t\overline{A}\,.$$

Il polinomio caratteristico di A è $X^2 - (4+2i)X + 8i$, le cui radici sono 4 e $2i$. Due autovettori relativi, nell'ordine, a 4 e a $2i$, sono

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix},$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

o anche

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix},$$

dove $C = \frac{1}{\sqrt{2}}B$ è unitaria.

9) L'ipotesi è che $P(A) = 0$, dove $P(X) = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$. Il polinomio minimo deve essere un divisore monico di P. Le possibilità sono $1, X, X-1, X+1, X(X-1), X(X+1), (X-1)(X+1), P(X)$. In ognuno dei casi le radici del polinomio minimo sono semplici, e quindi A è diagonalizzabile. Indichiamo con $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ la matrice diagonale i cui termini diagonali sono, nell'ordine, $a_1, \ldots, a_n$. A meno di

permutazioni dei termini diagonali, le possibilità per D sono:

matrice D	polinomio caratteristico	polinomio minimo
$\mathrm{diag}(0,0,0,0)$	X^4	1
$\mathrm{diag}(1,0,0,0)$	$X^3(X-1)$	$X(X-1)$
$\mathrm{diag}(-1,0,0,0)$	$X^3(X+1)$	$X(X+1)$
$\mathrm{diag}(1,1,0,0)$	$X^2(X-1)^2$	$X(X-1)$
$\mathrm{diag}(1,-1,0,0)$	$X^2(X-1)(X+1)$	$P(X)$
$\mathrm{diag}(-1,-1,0,0)$	$X^2(X+1)^2$	$X(X+1)$
$\mathrm{diag}(1,1,1,0)$	$X(X-1)^3$	$X(X-1)$
$\mathrm{diag}(1,1,-1,0)$	$X(X-1)^2(X+1)$	$P(X)$
$\mathrm{diag}(1,-1,-1,0)$	$X(X-1)(X+1)^2$	$P(X)$
$\mathrm{diag}(-1,-1,-1,0)$	$X(X+1)^3$	$X(X+1)$
$\mathrm{diag}(1,1,1,1)$	$(X-1)^4$	$X-1$
$\mathrm{diag}(1,1,1,-1)$	$(X-1)^3(X+1)$	$(X-1)(X+1)$
$\mathrm{diag}(1,1,-1,-1)$	$(X-1)^2(X+1)^2$	$(X-1)(X+1)$
$\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$	$(X-1)(X+1)^3$	$(X-1)(X+1)$
$\mathrm{diag}(-1,-1,-1,-1)$	$(X+1)^4$	$X+1$

10) Le matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

hanno rango 2, quindi v_2 è dipendente da v_1 e v_3, che sono indipendenti, e w_3 è dipendente da w_1 e w_2, che sono indipendenti. Dunque A e B sono i sottospazi affini di dimensione 2 di equazioni parametriche

$$\begin{aligned} &P + t_1v_1 + t_3v_3\,, \\ &Q + s_1w_1 + s_2w_2\,, \end{aligned}$$

rispettivamente. Per trovare $A \cap B$ bisogna trovare le soluzioni, se ci sono, del sistema di quattro equazioni lineari nelle quattro incognite t_1, t_3, s_1, s_2:

$$P + t_1v_1 + t_3v_3 = Q + s_1w_1 + s_2w_2\,,$$

cioè

$$t_1v_1 + t_3v_3 - s_1w_1 - s_2w_2 = Q - P\,.$$

In termini espliciti, questo è il sistema

$$\begin{pmatrix} t_1 & t_3 & s_1 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$Z = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

ha rango 3, mentre la matrice orlata

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 4, e quindi il sistema non ha soluzioni. Dunque $A \cap B = \emptyset$. Il più piccolo sottospazio affine contenente sia A che B coincide con $\mathbb{R}^4$. In effetti, dato che A e B sono due piani e non si intersecano, se fossero contenuti in uno stesso spazio tridimensionale dovrebbero avere la stessa giacitura, il che non è dato che la matrice Z ha rango 3, e non 2.

11) $\Sigma(M)$ è lineare in M e XAY è bilineare in (X, Y), quindi φ è bilineare. Inoltre $\Sigma({}^tM) = \Sigma(M)$. Dunque

$$\varphi(X,Y) = \Sigma(XAY) = \Sigma({}^t(XAY)) = \Sigma({}^tY\,{}^tA\,{}^tX) = \Sigma(YAX) = \varphi(Y,X)\,.$$

Una base di V è data dalle matrici

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si calcola immediatamente che

$$\varphi(E_1, E_1) = 2\,, \qquad \varphi(E_2, E_2) = -2\,, \qquad \varphi(E_3, E_3) = 2\,,$$
$$\varphi(E_1, E_2) = -1\,, \qquad \varphi(E_1, E_3) = -3\,, \qquad \varphi(E_2, E_3) = -1\,,$$

dunque la matrice di φ rispetto alla base scelta è

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

che ha determinante nullo. Dunque la forma φ è degenere. Poichè vi sono sia vettori X tali che $\varphi(X,X) > 0$ (ad esempio E_1), che vettori X tali che $\varphi(X,X) < 0$ (ad esempio E_2), la forma φ deve avere indice 1, e dunque segnatura $(1, 1)$.
Si calcola facilmente che $\varphi(B, B) = -8$, dove

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia ora u un elemento di U che sia anche ortogonale a U. Deve essere $u = kB$ per qualche numero reale k, e quindi $0 = \varphi(u, u) = k^2\varphi(B, B) = -8k^2$, da cui segue che $k = 0$, e quindi $u = 0$. Se poi $v \in V$, allora possiamo scrivere

$$v = v + \frac{\varphi(v, B)}{8}B - \frac{\varphi(v, B)}{8}B\,.$$

D'altra parte

$$\varphi\left(B, v + \frac{\varphi(v, B)}{8}B\right) = 0\,,$$

e quindi si è scritto v come somma di un elemento di U e di un vettore ortogonale a U. Infine, la restrizione di φ al complemento ortogonale di U non può essere definita positiva, altrimenti φ sarebbe non degenere.

12) I due piani sono paralleli o coincidenti se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} 1-t & 2 & -t \\ 1 & -t & 2 \end{pmatrix}$$

ha rango 1. Ciò accade quando

$$t(t-1) = 2\,, \quad t^2 = 4\,, \quad 2t - 2 = t\,,$$

cioè quando $t = 2$. Per questo valore di t i due piani non si intersecano, e quindi sono paralleli, dato che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1-t & 2 & -t & t \\ 1 & -t & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ha sempre rango 2. Supponiamo ora che $t \neq 2$. Dato che A e B non sono paralleli o coincidenti, la loro intersezione è una retta, e ha quindi una rappresentazione parametrica della forma

$$s \mapsto P + sV\,,$$

dove P è una soluzione del sistema non omogeneo

$$\begin{aligned} &(1-t)x_1 + 2x_2 - tx_3 = t \\ &x_1 - tx_2 + 2x_3 = 1 \end{aligned}$$

e V una soluzione non nulla del sistema omogeneo

$$\begin{aligned} &(1-t)x_1 + 2x_2 - tx_3 = 0 \\ &x_1 - tx_2 + 2x_3 = 0\,. \end{aligned}$$

Ad esempio si può scegliere

$$P = \left(\frac{-3t}{t-2}, 0, \frac{2t-1}{t-2}\right), \qquad V = (-t-2, 1, t+1)\,.$$

13) Indichiamo con A la matrice da diagonalizzare. Sia ζ una radice terza non banale dell'unità, e poniamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta^2 \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

Notiamo che

$$Av_1 = 2v_1\,, \quad Av_2 = \begin{pmatrix} 2\zeta \\ 2\zeta^2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\zeta v_2\,, \quad Av_3 = \begin{pmatrix} 2\zeta^2 \\ 2\zeta \\ 2 \end{pmatrix} = 2\zeta^2 v_3\,.$$

In altre parole, $AB = BD$, dove

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 \\ 1 & \zeta^2 & \zeta \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 2\zeta^2 \end{pmatrix}.$$

Inoltre v_1, v_2, v_3 sono ortogonali fra loro rispetto al prodotto scalare standard su $\mathbb{C}^3$; ad esempio, il prodotto scalare di v_2 con v_3 è

$$1 \cdot 1 + \zeta \cdot \overline{\zeta^2} + \zeta^2 \cdot \overline{\zeta} = 1 + \zeta^2 + \zeta = 0\,.$$

Infine v_1, v_2, v_3 hanno norma pari a $\sqrt{3}$. Ne segue che

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}} B$$

è unitaria e che

$$U^{-1}AU = D\,.$$

Non è possibile diagonalizzare A tramite una trasformazione ortogonale dato che non tutti i suoi autovalori sono reali.

14) Osserviamo che $P(X) = (X-1)(X-3+t)(X-t-1)$. Se $t \neq 0, 1, 2$ le tre radici di questo polinomio sono distinte e quindi, a meno di permutazioni degli elementi diagonali, la forma di Jordan di A è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-t & 0 \\ 0 & 0 & t+1 \end{pmatrix}.$$

Se $t = 0$ o $t = 2$, gli autovalori di A sono 1 (con molteplicità 2) e 3. Quindi, a meno di permutazioni di righe e colonne, la forme di Jordan possibili per A sono

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se $t = 1$, gli autovalori di A sono 2 (con molteplicità 2) e 1. Quindi, a meno di permutazioni di righe e colonne, la forme di Jordan possibili per A sono

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

15) Siano R e S elementi di P_n (o di D_n). Allora $\varphi(R, S)$ è somma di integrali tra -1 e 1 di monomi di grado dispari, e quindi di integrali nulli. Dunque P_n e D_n sono sottospazi isotropi.
Se R è un elemento di D_n, poniamo $\Phi(R) = R/x$. Si tratta di un elemento di P_n, o addirittura di P_{n-1} se n è pari. Sia ora S un elemento di V_n non appartenente a P_n. Possiamo dunque scrivere S come somma di un elemento di P_n e di un elemento non nullo Q di D_n. Allora

$$\varphi(S, \Phi(Q)) = \varphi(Q, \Phi(Q)) = \int_{-1}^{1} Q(x)\frac{Q(x)}{x} x dx = \int_{-1}^{1} Q(x)^2 dx$$

è strettamente positivo, in quanto integrale su un intervallo di ampiezza non nulla di una funzione continua non negativa che, in virtù del principio di identità dei polinomi, non è identicamente nulla. In particolare, ogni sottospazio vettoriale di V_n che contenga P_n e S non è isotropo. Dunque P_n è isotropo massimale. Allo stesso modo si ragiona per D_n quando n è dispari; basta scambiare i ruoli di P_n e D_n e rimpiazzare Φ con l'operatore Ψ definito da $\Psi(R) = xR$.
Calcoliamo infine la segnatura di φ. Supponiamo dapprima che n sia dispari. Gli operatori Φ e Ψ sono uno inverso dell'altro e stabiliscono un isomorfismo tra P_n e D_n. Scegliamo una base $v_1, v_2, \ldots$ per P_n. Allora una base per V_n è

$$v_1, v_2, \ldots, \Psi(v_1), \Psi(v_2), \ldots$$

Se $R \in P_n$ non è nullo,

$$\varphi(R, \Psi(R)) = \int_{-1}^{1} (xR(x))^2 dx > 0\,.$$

Inoltre

$$\varphi(R, \Psi(S)) = \int_{-1}^{1} R(x)S(x)x^2 dx = \varphi(S, \Psi(R))\,.$$

Ne segue che, rispetto alla base scelta, la matrice della forma bilineare φ può essere scritta in forma a blocchi come

$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{pmatrix},$$

dove M è simmetrica definita positiva. Quindi la segnatura di φ è $(h, h, 0)$, dove $n = 2h - 1$. Se invece $n = 2h$ è pari, dato che V_n contiene V_{n-1} sappiamo che φ

ha almeno h autovalori positivi e h negativi. Le segnature possibili sono dunque al più tre, e cioè $(h, h, 1)$, $(h+1, h, 0)$ e $(h, h+1, 0)$. Per escludere la seconda e terza possibilità si può ragionare come segue. Definiamo un automorfismo J di V_n ponendo $J(R)(x) = R(-x)$. Allora, cambiando la variabile di integrazione da x a $u = -x$ si ricava che

$$\varphi(J(R), J(S)) = \int_{-1}^{1} R(-x)S(-x)xdx = \int_{1}^{-1} R(u)S(u)udu = -\varphi(R, S).$$

Ne segue che il numero degli autovalori negativi di φ è uguale a quello degli autovalori positivi. La sola possibilità è quindi che la segnatura sia $(h, h, 1)$.

16) La matrice del sistema omogeneo associato è

$$A = \begin{pmatrix} 1+2t & t & 1 \\ 1+t & t & 1+t \\ 1+2t & 1+t & 1 \end{pmatrix},$$

il cui determinante è $-2t^2 - 2t$. Quindi per $t \neq 0, -1$ la matrice A ha rango 3, e dunque il sistema originario ha una sola soluzione, che si può calcolare ad esempio per eliminazione (ma non lo facciamo). In termini geometrici questo significa che l'intersezione dei tre piani è un punto, e in particolare ha dimensione zero. Per $t = 0, -1$ la matrice A ha rango 2. La matrice completa del sistema per $t = 0$ vale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

che ha rango 3; ne segue che per $t = 0$ i tre piani non hanno punti in comune. Invece per $t = -1$ la matrice completa è

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

che ha rango 2 (la prima riga è somma delle altre due). L'intersezione cercata è dunque la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{aligned} -y &= 2 \\ -x + z &= -1 \end{aligned}$$

Una equazione parametrica per questa retta è ad esempio

$$\begin{aligned} x &= s \\ y &= -2 \\ z &= s - 1 \end{aligned}$$

dove s è un parametro reale.

17) Il polinomio caratteristico di A è

$$\begin{aligned} X^3 - 3iX^2 - X - i &= (X^2 - 2iX + 1)(X - i) \\ &= (X - i(1+\sqrt{2}))(X - i(1-\sqrt{2}))(X - i)\,. \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori di A sono $i, i(1+\sqrt{2}), i(1-\sqrt{2})$ e hanno molteplicità 1. Degli autovettori di norma 1 relativi a questi autovalori sono, rispettivamente,

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Questi vettori sono ortogonali fra loro, e quindi la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

è unitaria. Inoltre

$$U \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i(1+\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & i(1-\sqrt{2}) \end{pmatrix} = AU\,.$$

In definitiva

$$A = U \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i(1+\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & i(1-\sqrt{2}) \end{pmatrix} U^{-1} = U \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i(1+\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & i(1-\sqrt{2}) \end{pmatrix} {}^t\overline{U}\,.$$

In altre parole, A è uguale a

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i(1+\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & i(1-\sqrt{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}.$$

18) Il polinomio caratteristico di A è $(X-1)^4$, quindi $A = I + N$, dove

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è nilpotente. Notiamo che $N^2 = 0$. Inoltre il nucleo K della applicazione $X \mapsto NX$ è costituito da quei vettori

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

tali che $t=0$ e $x=y$; in particolare ha dimensione 2. Una base di $\mathbb{C}^4$ modulo K è costituita ad esempio dai vettori

$$v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad v_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

e quindi una base di $\mathbb{C}^4$ è costituita dai vettori

$$v_1=Nv_2, v_2, v_3=Nv_4, v_4\,.$$

Poiché v_1 e v_3 appartengono a K, rispetto a questa base la matrice di $X\mapsto NX$ è

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

e quindi quella di $X\mapsto AX$ è

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Osserviamo infine che

$$v_1=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\qquad v_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Riassumendo,

$$AB=B\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

dove

$$B=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&1&0\\1&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

o anche

$$A=B\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}B^{-1},$$

dove

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

19) Rispetto alla base standard e_1, e_2, e_3, e_4, la matrice della forma bilineare simmetrica associata a Q è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, rispetto alla base

$$f_1 = e_1, \quad f_2 = e_2 - e_1, \quad f_3 = e_3 - e_1, \quad f_4 = e_4 - e_1\,,$$

la matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ripetiamo il procedimento, e passiamo alla base

$$g_1 = f_1, \quad g_2 = f_4, \quad g_3 = f_3 - f_4, \quad g_4 = f_2 - f_4\,.$$

Rispetto a questa, la matrice della forma bilineare è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infine, sempre ragionando allo stesso modo, si conclude che, rispetto alla base

$$h_1 = g_1, \quad h_2 = g_2, \quad h_3 = g_4, \quad h_4 = g_3 - g_4\,,$$

la matrice della forma bilineare è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

In particolare, la segnatura di Q è $(2, 2, 0)$. Esplicitamente, la base h_1, h_2, h_3, h_4 è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

20) La matrice del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} t & 2 & 1 \\ (1-t) & 1 & -1 \\ 1 & 2t & (2t+1) \end{pmatrix},$$

che ha rango almeno 2 perchè il minore

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ha determinante -3. Il determinante di A è $6t^2 + t - 5$, che ha come radici -1 e $5/6$. Quindi l'intersezione dei tre piani è un punto (l'origine) per $t \neq -1$ e $t \neq 5/6$, ed è una retta quando A ha rango 2, cioè per $t = -1$ o per $t = 5/6$. Se $t = -1$ la retta in questione ha equazioni cartesiane

$$\begin{aligned} -x + 2y + z &= 0 \\ 2x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

La corrispondente rappresentazione parametrica è $x = -3w, y = w, z = -5w$, dove w è un parametro reale. Se $t = 5/6$ la retta in questione ha equazioni cartesiane

$$\begin{aligned} 5x + 12y + 6z &= 0 \\ x + 6y - 6z &= 0 \end{aligned}$$

La corrispondente rappresentazione parametrica è $x = -6w, y = 2w, z = w$.

21) Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

una matrice reale 2×2. Questa matrice è normale se e solo se

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = A\,{}^tA = {}^tAA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

cioè se e solo se

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}.$$

Questa condizione implica che $b^2 = c^2$. Se $b = c$ la matrice A è simmetrica. Se $b = -c \neq 0$ deve essere anche $-ab + bd = ab - bd$, e quindi $a = d$. In altre parole, A è uguale a $\sqrt{a^2+b^2}$ volte la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \end{pmatrix}$$

che è ortogonale.

22) Notiamo che

$$M^h = \begin{pmatrix} A^h & D \\ 0 & B^h \end{pmatrix}$$

per qualche matrice D. Quindi ci sono matrici E e F tali che

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & E \\ 0 & P(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$$
$$Q(M) = \begin{pmatrix} Q(A) & F \\ 0 & Q(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(A) & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$PQ(M) = P(M)Q(M) = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & P(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q(A) & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Ne segue che il polinomio minimo di M divide PQ. Se A è diagonalizzabile, allora P non ha radici multiple, e analogamente per B. Se poi P e Q sono primi fra loro, anche PQ non può avere radici multiple, e quindi non può averle nemmeno il polinomio minimo di M. Ne segue che M è diagonalizzabile.

23) Notiamo che $\varphi(I, I) = 2i$, e poniamo $v_1 = I$. Una matrice complessa

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

è ortogonale a I rispetto a φ se e solo se

$$0 = \mathbb{S}(Q\,{}^tA) = \mathbb{S}\begin{pmatrix} bi & di \\ ai & ci \end{pmatrix} = i(a + d)\,,$$

cioè quando $d = -a$. Tra queste matrici vi è

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $\varphi(v_2, v_2) = -2i$. Una matrice A come sopra è ortogonale a v_1 e a v_2 se e solo se $d = -a$ e in più

$$0 = \varphi(v_2, {}^tA) = \mathbb{S}\begin{pmatrix} bi & -ai \\ -ai & -ci \end{pmatrix} = -2ai\,,$$

cioè se $d = a = 0$. Le matrici

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sono dunque ortogonali a v_1 e v_2, e in più hanno le seguenti proprietà:

$$\varphi(v_3, v_4) = 0\,, \quad \varphi(v_3, v_3) = 2i\,, \quad \varphi(v_4, v_4) = -2i\,.$$

Quindi, rispetto alla base v_1, v_2, v_3, v_4, la matrice della forma bilineare φ è

$$\begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}.$$

24) Indichiamo con Π_1 e Π_2 i primi due piani. Possiamo scrivere

$$a(t_1, t_2) = P + t_1 v_1 + t_2 v_2\,, \qquad b(s_1, s_2) = Q + s_1 w_1 + s_2 v_2\,,$$

dove

$$\begin{aligned} P &= (1, 1, 1)\,, & Q &= (1, 0, 0)\,, \\ v_1 &= (1, 1, 0)\,, & w_1 &= (1, 1, -1)\,, \\ v_2 &= (0, -1, 1)\,, & w_2 &= (1, -1, 0)\,. \end{aligned}$$

I vettori v_1, v_2, w_1, w_2 sono indipendenti, quindi Π_1 e Π_2 non sono paralleli, e si intersecano in una retta. Un vettore comune alle giaciture dei due piani è $(1, 3, -2)$; inoltre un punto comune a Π_1 e Π_2 è $(0, 1, 0) = a(-1, -1) = b(0, -1)$. Quindi una rappresentazione parametrica di Λ è

$$t \mapsto (t, 1 + 3t, -2t)\,.$$

Il piano Π è parallelo a Λ quando

$$0 = (1 - T) - 3(1 + T) + 2(1 - T)\,,$$

cioè quando $T = 0$. Per tutti gli altri valori di T il piano Π interseca Λ in un unico punto. Per $T = 0$, il piano Π interseca Λ solo se la contiene. Però, per questo valore del parametro, Π non contiene $(0, 1, 0)$, e quindi non interseca Λ.

25) Tutte e tre le matrici hanno come polinomio caratteristico

$$P(t) = t^3 + 5t^2 + 3t - 9 = (t - 1)(t + 3)^2\,.$$

L'autospazio di C relativo all'autovalore -3 ha dimensione 1; in particolare, C non è diagonalizzabile. Cerchiamo invece gli autovettori di A relativi all'autovalore -3, risolvendo $AX = -3X$, dove X è il vettore colonna di componenti x, y, z, cioè risolvendo il sistema omogeneo

$$\begin{aligned} 4y - 8z &= 0 \\ -4y + 8z &= 0 \\ -4y + 8z &= 0 \end{aligned}$$

È chiaro che lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2, e quindi A è diagonalizzabile. Allo stesso modo si mostra che anche B è diagonalizzabile. Dunque A e B sono simili alla stessa matrice diagonale, e quindi simili tra loro, ma non simili a C.

26) La matrice B è simile a una matrice triangolare. Si può cioè scrivere $B = M^{-1}TM$, dove T è triangolare e M è invertibile. Gli elementi della diagonale di T sono gli autovalori di B, e ognuno di essi è ripetuto un numero di volte pari alla sua molteplicità. D'altra parte $A = B^2 = M^{-1}T^2M$, e gli elementi della diagonale di T^2, che è anch'essa triangolare, sono i quadrati degli elementi della diagonale di B. Dato che sono gli autovalori di A, sono tutti distinti, e quindi lo stesso è vero per gli elementi della diagonale di B.

27) Scriviamo una catena di matrici, la prima delle quali è la matrice della forma quadratica Q rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^4$, e ognuna delle successive è ottenuta dalla precedente applicando una operazione elementare per righe e la corrispondente operazione per colonne.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'ultima di queste matrici è in forma di Sylvester e ha un autovalore nullo, uno negativo e due positivi.

28) I due piani sono paralleli o coincidenti solo quando i vettori $(1, 1, 1)$ e $(1, 1-2t, 1-2t)$ sono proporzionali, cioè solo per $t = 0$. In questo caso le equazioni si riducono a

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 0\,, \end{aligned}$$

che non hanno soluzioni comuni; dunque i due piani hanno intersezione vuota. Per $t \neq 0$ invece l'intersezione dei due piani è una retta. Sottraendo la seconda equazione dalla prima si ottiene

$$2t(y + z) = t + 1\,,$$

cioè

$$y = -z + \frac{t+1}{2t}\,.$$

Una equazione parametrica per l'intersezione dei due piani è dunque

$$y \mapsto \left(t + 1 - \frac{t+1}{2t}, -z + \frac{t+1}{2t}, z \right)\,.$$

29) Si calcola subito che $A^2 = I$. Dunque, per ogni M,

$$T(T(M)) = AAMA^{-1}A^{-1} = A^2M(A^2)^{-1} = M\,.$$

In altre parole, T^2 è l'applicazione identità, e quindi il polinomio minimo di T divide $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. Dato che questo polinomio ha radici semplici, T è diagonalizzabile. I suoi autovalori vanno cercati tra 1 e -1. Per trovare gli (eventuali) autovettori relativi a -1, bisogna risolvere il sistema di equazioni in x, y, z, w:

$$A\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}A^{-1} = -\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 4x + z - 3y & w + x \\ -3x - 3w & -3y - 4w + z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}A = 0\,.$$

Il sistema si riduce quindi a

$$\begin{aligned} &x + w = 0 \\ &3y + 4w - z = 0\,. \end{aligned}$$

Due matrici indipendenti che soddisfano queste condizioni sono

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tutti gli altri autovettori per -1 sono combinazione lineare di queste matrici. Gli autovettori relativi a 1 si trovano con conti analoghi, o più semplicemente notando che $T(I) = I$, $T(A) = A$, e che l'autospazio di 1 deve avere dimensione 2, cioè pari alla differenza tra la dimensione di V e quella dell'autospazio relativo a -1. Dato che I e A sono indipendenti, gli autovettori relativi a 1 sono tutte e sole le loro combinazioni lineari. Dato che T ha sia 1 che -1 per autovalori, il suo polinomio minimo è $X^2 - 1$.

30) Scriviamo $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Allora

$$\langle A, B\rangle = \sum_i \Big(\sum_j a_{ij}\bar{b}_{ij}\Big) = \sum_{i,j} a_{ij}\bar{b}_{ij}\,.$$

In altre parole, se identifichiamo U allo spazio vettoriale delle quaterne di numeri complessi, il prodotto scalare si identifica con quello standard su $\mathbb{C}^4$. L'applicazione F è chiaramente lineare. Per vedere che è unitaria notiamo che

$$\langle F(A), F(B)\rangle = Tr({}^t\!A\overline{B}) = Tr({}^t({}^t\overline{B}A)) = Tr({}^t\overline{B}A) = Tr(A\,{}^t\overline{B}) = \langle A, B\rangle.$$

In questo calcolo si è usato il fatto che, se M e N sono matrici quadrate della stessa dimensione, allora $Tr({}^tM) = Tr(M)$ e $Tr(MN) = Tr(NM)$. Quanto agli autovettori di F, notiamo intanto che l'autospazio relativo a 1 consiste di tutte le matrici simmetriche, e ha quindi dimensione 3. D'altra parte, se A è antisimmetrica, allora $F(A) = -A$, e quindi anche -1 è un autovalore, e l'autospazio corrispondente non può avere come dimensione altro che 1. Dunque una base ortonormale di autovettori è data ad esempio da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

31) Supponiamo che Q sia degenere, cioè che vi sia un elemento non nullo $v \in V$ tale che $Q(v, v') = 0$ per ogni v'; in particolare si ha dunque che $Q(v, v) = 0$. Ciò dice tra l'altro che, se W è il sottospazio generato da v, allora $W^\perp \supset W \neq \{0\}$. Supponiamo dunque Q non degenere. Se Q non è definita vi è un vettore v tale che $Q(v, v) = 1$, e la restrizione di Q a $v^\perp$ non è né definita positiva né degenere. Dunque vi è un w tale che $Q(v, w) = 0$ e $Q(w, w) = -1$. Ma allora $v - w \neq 0$ e $Q(v - w, v - w) = Q(v, v) - Q(w, w) = 0$. Se W è il sottospazio generato da $v - w$ se ne deduce, come prima, che $W^\perp \supset W \neq \{0\}$.

32) La prima retta passa per il punto $P = (1, -2, 1, 0)$ ed è parallela al vettore $v = (3, -1, 1, 2)$, la seconda passa per $Q = (2, 0, 2, 1)$ ed è parallela a $u = (-1, 1, 2, -2)$. Dunque il sottospazio cercato passa per P e ha come giacitura il sottospazio generato da v, u e $Q - P = (1, 2, 1, 1)$. Questo sottospazio ha dimensione 3 perchè la matrice Z che ha u, v e $Q - P$ come righe ha rango 3. Quindi la sua equazione è

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0\,,$$

dove il vettore (a, b, c, d) è una soluzione non nulla del sistema

$$(a, b, c, d)\,{}^tZ = 0\,.$$

Una soluzione è ad esempio $a = -3, b = -1, c = 2, d = 3$. L'equazione del sottospazio affine cercato è quindi della forma $-3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = k$. Per trovare k sostituiamo al posto delle variabili le coordinate di P e otteniamo $k = 1$. L'equazione cercata è dunque

$$-3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1\,.$$

33) Il polinomio caratteristico di A è $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$. Una sua radice è 1, e dividendo per $X - 1$ si vede immediatamente che $P(X) = (X - 1)(X^2 + 1)$. Le tre radici complesse del polinomio caratteristico sono dunque 1, i e $-i$. Poiché sono distinte, la matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$; dato che non sono tutte reali, A non è invece diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
Quanto a B, il suo polinomio caratteristico è $Q(X) = X^3 + 2X^2 - 4X - 8$. Una delle radici di $Q(X)$ è 2, e dividendo per $X - 2$ si ottiene che $Q(X) = (X - 2)(X^2 + 4X + 4) = (X - 2)(X + 2)^2$. In altre parole gli autovalori di B sono 2 e -2, quest'ultimo con molteplicità due. D'altra parte

$$B + 2I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, quindi l'autospazio corrispondente all'autovalore -2 ha dimensione 1. Ne segue che B non è diagonalizzabile né su $\mathbb{C}$, né su $\mathbb{R}$.

34) Indichiamo con $b(\ ,\ )$ la forma bilineare simmetrica associata a q. La sua matrice rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$ è

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Se v_1 è il primo vettore della base standard, allora $b(v_1, v_1) = 1$. L'ortogonale di v_1, cioè l'insieme V dei vettori v tali che $b(v_1, v) = 0$, è costituito da tutti i vettori colonna

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

tali che

$${}^t v_1 Q X = 0\,,$$

cioè tali che

$$x + y - z = 0\,,$$

cioè ancora i vettori della forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}.$$

Uno di questi è

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si calcola subito che $b(v_2, v_2) = 1$. All'interno di V i vettori ortogonali a v_2 sono quelli della forma

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}.$$

Se v_3 è quello, tra questi vettori, per cui $x = 1/\sqrt{3}$, si calcola immediatamente che $b(v_3, v_3) = -1$. Dunque rispetto alla base v_1, v_2, v_3 la matrice della forma bilineare $b(\ ,\ )$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

In particolare ne segue che la forma è non degenere.

35) Le matrici A e B hanno rango 3, e quindi $AX = 0$ se e solo se $X = 0$, e lo stesso vale per B. Quindi AX e BX sono proporzionali se e solo se c'è una costante λ tale che

$$AX = \lambda BX\,.$$

Moltiplicando per B^{-1}, ciò equivale a dire che

$$B^{-1}AX = \lambda X\,.$$

In altre parole, i vettori X cercati sono gli autovettori di

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Un autovettore, con autovalore 1, è

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di questa matrice è $X^3 - 4X^2 + 4X - 1 = (X-1)(X^2 - 3X + 1)$. Le radici di $X^2 - 3X + 1$ sono $3/2 \pm \sqrt{5}/2$, e due autovettori corrispondenti a questi due autovalori sono

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1/2 + \sqrt{5}/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1/2 - \sqrt{5}/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque i vettori cercati sono i multipli di v_1, quelli di v_2 e quello di v_3.

36) P_s ha dimensione due perchè la matrice del sistema omogeneo associato al sistema che lo definisce è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1+s \end{pmatrix},$$

che ha sempre rango 2. Indichiamo con A_s il più piccolo sottospazio affine contenente sia L che P_s. La giacitura di L è generata da $(1, 1, -1, -1)$, che appartiene alla giacitura di P_s se e solo se

$$1 + 1 - 1 - 1 = 0 = 1 - 1 - 1 - (1+s)\,,$$

cioè se e solo se $s = -2$. Notiamo anche che L non ha mai punti in comune con P_s, dato che sostituendo $(2+t, -2+t, -t, 1-t)$ in $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ si ottiene sempre 1. Ne segue che per $s \neq -2$ il sottospazio A_s è tutto $\mathbb{R}^4$. Invece per $s = -2$ la giacitura di A_s è generata dalla giacitura di P_s e da un vettore che sia differenza tra un punto di L e uno di P_s, ad esempio $(2, -2, 0, 1) - (1/2, -1/2, 0, 0)$, o anche da un multiplo di questo, ad esempio $(3,-3,0,2)$. Una rappresentazione parametrica di A_{-2} è dunque ad esempio

$$u,v,w \mapsto (1/2,-1/2,0,0)+u(3,-3,0,2)+v(1,1,-1,-1)+w(1,-1,-1,1)\,,$$

e A_{-2} ha dimensione 3.

37) Se

$$0 = aw_1 + bw_2 + cw_3 = (ib+c)v_1 + (a+b-c)v_2 - cv_3\,,$$

allora, visto che $v = (v_1, v_2, v_3)$ è una base, $c = 0$, e quindi $ib = 0$, e dunque $b = 0$, e infine $a = 0$. Dunque w_1, w_2, w_3 sono indipendenti, e quindi costituiscono una base w di V per ragioni di dimensione. Poi

$$\begin{aligned}
M_{w\,w}(f) &= M_{w\,v}(\mathbf{1})M_{v\,v}(f)M_{v\,w}(\mathbf{1})\\
&= \begin{pmatrix} 0 & i & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1/2-i\\ -2i & 2 & -i\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Gli autovalori di f sono gli autovalori di quest'ultima matrice, e cioè 2 con molteplicità 2 e 3 con molteplicità 1.

38) La matrice rispetto alla base standard della forma bilineare B associata a Q è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Sia v_1 il primo vettore della base standard e notiamo che $B(v_1, v_1) = 1$, mentre lo spazio dei vettori v tali che $B(v_1, v) = 0$ è costituito da tutti i vettori della forma

$$\begin{pmatrix} a\\ b\\ -a\end{pmatrix},$$

con a e b arbitrari. Sia v_2 quello tra questi per cui $a = 0$, $b = 1$. Notiamo che $B(v_2, v_2) = 1$. I vettori v tali che $B(v_1, v) = 0$ e $B(v_2, v) = 0$ sono tutti e soli quelli della forma

$$\begin{pmatrix} a\\ 0\\ -a\end{pmatrix}.$$

Sia v_3 quello, tra questi, per cui $a = 1$. Notiamo che $B(v_3, v_3) = 0$. Dunque la matrice di B rispetto alla base v_1, v_2, v_3 è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che è in forma di Sylvester.

39) La prima affermazione è vera. Infatti se A e B sono simmetriche ${}^t(A-B) = {}^tA - {}^tB = A - B$. Le altre due affermazioni sono false. Infatti I e $2I$ sono positive definite, ma $I - 2I = -I$ no. Inoltre le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sono simmetriche ma il loro prodotto

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

no.

40) Il sistema è della forma $AX = B$, dove

$$A = \begin{pmatrix} t & 1-t & -2t \\ 1 & t & t \\ 2 & t & t \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

e X è il vettore colonna le cui componenti sono, nell'ordine, x, y, z. Si calcola subito che $\det(A) = t^2 + t$. Quindi per $t \neq 0, -1$ la matrice A è non singolare e il sistema ha una e una sola soluzione. Per $t = 0$ la matrice A si riduce a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha rango 2, come la matrice completa del sistema (cioè (A, B)), che in questo caso è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque per $t = 0$ il sistema ammette infinite soluzioni. Per $t = -1$ la matrice A e la matrice completa del sistema sono invece

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

che hanno ranghi 2 e 3, rispettivamente. Dunque per $t = -1$ il sistema non ha soluzioni.

41) Il polinomio caratteristico di A è $\det(XI - A) = X^3 + X^2 - X - 1$, che ha come radici 1 e -1 (quest'ultima con molteplicità 2). Il polinomio minimo può dunque essere uguale al polinomio caratteristico oppure a $P(X) = (X-1)(X+1) = X^2 - 1$. Si verifica subito che $P(A) = 0$, e quindi P è il polinomio minimo di A; dato che ha radici semplici, A è diagonalizzabile.

42) Le matrice A ortogonali con determinante 1 sono della forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

con $a^2 + b^2 = 1$. Dire che $AB = BA$ equivale a dire che

$$\begin{pmatrix} a + b\sqrt{3} & b + a\sqrt{3} \\ -b + a\sqrt{3} & a - b\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b\sqrt{3} & b + a\sqrt{3} \\ -b + a\sqrt{3} & a + b\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

cioè che $b = 0$. Ne segue che $a = \pm 1$. Se invece A è ortogonale con determinante 1, è della forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},$$

con $a^2 + b^2 = 1$. Dire che $AB = BA$ equivale a dire che

$$\begin{pmatrix} a + b\sqrt{3} & b + a\sqrt{3} \\ b - a\sqrt{3} & -a + b\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b\sqrt{3} & b - a\sqrt{3} \\ b + a\sqrt{3} & -a + b\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

cioè che $a = 0$. Ne segue che $b = \pm 1$. In definitiva le matrici cercate sono

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

43) La funzione traccia è lineare, e AQB è lineare sia in A che in B, quindi φ è bilineare. Inoltre, se Q è simmetrica e A, B antisimmetriche,

$$\mathrm{Tr}(AQB) = \mathrm{Tr}({}^t(AQB)) = \mathrm{Tr}({}^tB\,{}^tQ\,{}^tA) = \mathrm{Tr}(-BQ(-A)) = \mathrm{Tr}(BQA).$$

Ciò mostra che φ è simmetrica. Una base di V è costituita dalle matrici

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nel caso considerato

$$\begin{array}{ccc} \varphi(u_1, u_1) = -1 & \varphi(u_2, u_2) = -2 & \varphi(u_3, u_3) = -1 \\ \varphi(u_1, u_2) = 0 & \varphi(u_1, u_3) = -1 & \varphi(u_2, u_3) = 1 \end{array}$$

In particolare, il complemento ortogonale di u_1 rispetto a φ contiene u_2, mentre il complemento ortogonale del sottospazio generato da u_1 e u_2 consiste di tutte le matrici $u = au_1 + bu_2 + cu_3$ tali che $\varphi(u, u_1) = \varphi(u, u_2) = 0$, cioè tali che

$$-a - c = 0\,; \quad -2b + c = 0\,.$$

Tutte le soluzioni di questo sistema sono proporzionali ad $a = -2, b = 1, c = 2$. La matrice

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

corrispondente ha la proprietà che

$$\varphi(u, u) = 2\,.$$

Una base con le caratteristiche cercate è dunque

$$v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} u = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Rispetto a questa base la matrice di φ è

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi la segnatura di φ è $(-, -, +)$.