Il discriminante

Maurizio Cornalba

23/3/2013

Siano $X_1, \dots, X_n$ indeterminate. Consideriamo i polinomi

$$V(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i>j}(X_i - X_j)$$
$$\Delta(X_1, \dots, X_n) = V(X_1, \dots, X_n)^2$$

Il polinomio $V(X_1, \dots, X_n)$ è chiaramente antisimmetrico. In altre parole

$$V(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)V(X_1, \dots, X_n)$$

per ogni permutazione $\sigma \in S_n$, dove $\epsilon(\sigma)$ sta per il segno di σ. Inoltre vale la seguente formula.

Lemma 1 (determinante di Vandermonde)**.**

$$V(X_1, \dots, X_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & X_1 & X_1^2 & \cdots & X_1^{n-1} \\ 1 & X_2 & X_2^2 & \cdots & X_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & X_n & X_n^2 & \cdots & X_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Dimostrazione. Nella dimostrazione indichiamo con $V'(X_1, \dots, X_n)$ il lato destro della formula da dimostrare. Ragioniamo per induzione su n. Quando $n = 2$ la formula è chiaramente valida. Per il passo induttivo consideriamo i due lati come polinomi in X_1 a coefficienti in $\mathbb{Z}[X_2, \dots, X_n]$. Entrambi hanno grado $n-1$ e hanno radici $X_2, \dots, X_n$. Sono quindi proporzionali. D'altra parte il coefficiente di X_1^{n-1} nel lato sinistro è $(-1)^{n-1}V(X_2, \dots, X_n)$, mentre nel lato destro è $(-1)^{n-1}V'(X_2, \dots, X_n)$. La tesi segue per ipotesi induttiva. $\square$

Dato che V è antisimmetrico, il suo quadrato Δ è un polinomio simmetrico, e quindi è della forma $D_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, dove D_n è un polinomio a coefficienti interi nelle funzioni simmetriche elementari $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Ad esempio

$$\Delta(X_1, X_2) = (X_1 - X_2)^2 = (X_1 + X_2)^2 - 4X_1X_2 = \sigma_1^2 - 4\sigma_2$$

Calcolare D_n, cioè trovare l'espressione di Δ in termini delle funzioni simmetriche elementari, non è immediato. Una prima osservazione è che il monomio massimo, rispetto all'ordinamento lessicografico dei polinomi nelle X_i, che compare in Δ è

$$X_1^{2n-2}X_2^{2n-4}\cdots X_{n-1}^2 = \prod_{i=1}^{n} X_i^{2n-2i},$$

e che compare con coefficiente 1. Quindi i monomi $\prod \sigma_i^{j_i}$ non compaiono in D_n se il multiindice $(j_1 + \cdots + j_n, j_2 + \cdots + j_n, \dots, j_n)$ è maggiore di $(2n-2, 2n-4, \dots, 2, 0)$ e il monomio

$$\prod_{i=1}^{n-1} \sigma_i^2$$

compare con coefficiente 1. In particolare, il grado di D_n è uguale a $2n-2$. Applichiamo queste considerazioni al calcolo di Δ nel caso $n=3$. Per quanto abbiamo osservato

$$\Delta(X_1, X_2, X_3) = \sigma_1^2\sigma_2^2 + a\sigma_1^3\sigma_3 + b\sigma_2^3 + c\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + d\sigma_3^2 \tag{1}$$

dove a, b, c, d sono interi da determinare. Un modo per trovare questi coefficienti è quello di assegnare valori particolari agli X_i e calcolare le varie funzioni simmetriche che compaiono in (1) per questi valori. Questo dà luogo a un sistema di equazioni lineari che permette di ricavare a, b, c, d.

Scelta 1. Poniamo $X_1 = 1$, $X_2 = -1$, $X_3 = 0$. In questo caso $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -1$, $\sigma_3 = 0$, mentre $\Delta = 4$. Ne segue che $b = -4$.

Scelta 2. Poniamo $X_1 = 1$, $X_2 = \zeta$, $X_3 = \zeta^2$, dove ζ è una radice cubica primitiva di 1. Ricordiamo che $1 + \zeta + \zeta^2 = 0$. In questo caso $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 1$, mentre

$$\Delta = (1-\zeta)^2(1-\zeta^2)^2(\zeta-\zeta^2)^2 = (2-\zeta-\zeta^2)^2(\zeta^2+\zeta-2) = -3^3 = -27$$

Ne segue che $d = -27$.

Scelta 3. Poniamo $X_1 = X_2 = 2$, $X_3 = -1$. In questo caso $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -4$, mentre $\Delta = 0$. Ne segue che $a = -4$.

Scelta 4. Poniamo $X_1 = X_2 = X_3 = 1$. In questo caso $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 1$, mentre $\Delta = 0$. Sostituendo questi valori in (1) otteniamo che $0 = 3^4 - 4 \cdot 3^3 + 3^2 c - 4 \cdot 3^3 - 27$, cioè che

$$0 = 9 - 12 + b - 12 - 3$$

Ne segue che $c = 18$.

La conclusione è che

$$\Delta(X_1, X_2, X_3) = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^3\sigma_3 - 4\sigma_2^3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 27\sigma_3^2 \tag{2}$$

Esercizio 1. Mostrare che

$$\begin{aligned}\Delta(X_1, X_2, X_3, X_4) = {} & \sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^2 - 4\sigma_1^2\sigma_2^3\sigma_4 - 4\sigma_1^3\sigma_3^3 + 18\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3\sigma_4 - 27\sigma_1^4\sigma_4^2 - 4\sigma_2^3\sigma_3^2 + 16\sigma_2^4\sigma_4 \\ & + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3^3 - 80\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3\sigma_4 - 6\sigma_1^2\sigma_3^2\sigma_4 + 144\sigma_1^2\sigma_2\sigma_4^2 - 27\sigma_3^4 + 144\sigma_2\sigma_3^2\sigma_4 \\ & - 128\sigma_2^2\sigma_4^2 - 192\sigma_1\sigma_3\sigma_4^2 + 256\sigma_4^3\end{aligned}$$

Una osservazione che può essere utile è che $\Delta(X_1, X_2, X_3, 0) = \sigma_3^2\Delta(X_1, X_2, X_3)$. Questo permette di determinare alcuni dei coefficienti nella formula per $\Delta(X_1, X_2, X_3, X_4)$ usando la formula (2).

Sia ora A un anello commutativo, e sia

$$P(X) = X^n + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_i X^{n-i} = X^n - a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n$$

un polinomio monico a coefficienti in A. Definiamo il *discriminante* di P come

$$\operatorname{disc}(P) = D_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{3}$$

Se scriviamo $P(X) = \prod(X - b_i)$, dove i b_i sono elementi di qualche sovraanello commutativo di A, gli a_i sono le funzioni simmetriche elementari nei b_i. In formule, $a_i = \sigma_i(b_1, \ldots, b_n)$. Possiamo dunque scrivere

$$\operatorname{disc}(P) = \Delta(b_1, \ldots, b_n) \tag{4}$$

Segue da (2) che, se $P = X^3 + pX + q$ è un polinomio cubico "in forma ridotta", il discriminante di P è

$$\mathrm{disc}(P) = -4p^3 - 27q^2$$

Per un polinomio cubico monico generale $Q = X^3 - a_1X^2 + a_2X - a_3$ la (2) dice invece che

$$\mathrm{disc}(Q) = a_1^2a_2^2 - 4a_1^3a_3 + 18a_1a_2a_3 - 4a_2^3 - 27a_3^2 \tag{5}$$

Quest'ultima formula può anche essere facilmente dedotta dalla precedente come segue. Osserviamo che

$$\Delta(b_1 + d, b_2 + d, \dots, b_n + d) = \Delta(b_1, b_2, \dots, b_n)$$

per ogni d. Questo significa che per ogni polinomio monico Q di grado n si ha che

$$\mathrm{disc}(Q(X + d)) = \mathrm{disc}(Q(X))$$

Quando $Q = X^3 - a_1X^2 + a_2X - a_3$, scegliendo $d = a_1/3$, si ha che

$$Q(X + d) = X^3 + (a_2 - a_1^2/3)X + (a_1a_2/3 - 2a_1^3/27 - a_3)$$

Applicando a questo polinomio la formula per il discriminante di un polinomio cubico in forma ridotta si ottiene la (5). È notevole che si ottenga un polinomio a coefficienti interi in a, b, c mentre i coefficienti di $Q(X + d)$ sono solo polinomi a coefficienti razionali in a, b, c.

La nozione di discriminante si estende facilmente anche a polinomi non monici. Siano $Z_1, \dots, Z_n$, $W_1, \dots, W_n$ indeterminate e poniamo

$$\Theta(Z_1, \dots, Z_n; W_1, \dots, W_n) = \prod_{i>j} (Z_iW_j - Z_jW_i)$$

È chiaro che

$$\Theta(Z_1, \dots, Z_n; 1, \dots, 1) = \Delta(Z_1, \dots, Z_n)$$

Per ogni sottoinsieme $I \subset \{1, \dots, n\}$ indichiamo con $\mathcal{C}I$ il complementare in $\{1, \dots, n\}$ e poniamo

$$Z_I = \prod_{i \in I} Z_i$$

Se X è un'altra indeterminata,

$$\prod_{i=1}^{n} (W_iX - Z_i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \tau_i X^{n-i}$$

dove

$$\tau_i = \tau_i(Z_1, \dots, Z_n; W_1, \dots, W_n) = \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ |I| = i}} Z_I W_{\mathcal{C}I}$$

Notiamo che

$$\Theta(Z_1, \dots, Z_n; W_1, \dots, W_n) = \prod_{i>j} (W_iW_j)^2 \Delta\left(\frac{Z_n}{W_n}, \dots, \frac{Z_n}{W_n}\right) = \tau_0^{2n-2} \Delta\left(\frac{Z_n}{W_n}, \dots, \frac{Z_n}{W_n}\right)$$

e che
$$\frac{\tau_i}{\tau_0} = \sigma_i\left(\frac{Z_n}{W_n}, \dots, \frac{Z_n}{W_n}\right)$$
Se indichiamo quest'ultima quantità semplicemente con σ_i, si ha dunque che

$$\Theta(Z_1, \dots, Z_n; W_1, \dots, W_n) = \tau_0^{2n-2} D_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

Dato che, come si è osservato, il grado di D_n è $2n-2$, il lato destro di questa uguaglianza è in realtà della forma $\overline{D}_n(\tau_0, \dots, \tau_n)$, dove $\overline{D}_n$ è un polinomio omogeneo di grado $2n-2$ a coefficienti interi. Più precisamente, se

$$D_n(T_1, \dots, T_n) = \sum_{\sum j_i \leq 2n-2} a_{j_1,\dots,j_n} T_1^{j_1} \cdots T_n^{j_n}$$

allora
$$\overline{D}_n(T_0, T_1, \dots, T_n) = \sum_{\sum j_i \leq 2n-2} a_{j_1,\dots,j_n} T_0^{(2n-2-\sum j_i)} T_1^{j_1} \cdots T_n^{j_n}$$

e
$$\Theta(Z_1, \dots, Z_n; W_1, \dots, W_n) = \overline{D}_n(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n)$$

In particolare

$$\begin{aligned}
\Theta(Z_1, Z_2; W_1, W_2) &= \tau_1^2 - 4\tau_0\tau_2 \\
\Theta(Z_1, Z_2, Z_3; W_1, W_2, W_3) &= \tau_1^2\tau_2^2 - 4\tau_1^3\tau_3 - 4\tau_0\tau_2^3 + 18\tau_0\tau_1\tau_2\tau_3 - 27\tau_0^2\tau_3^2 \\
\Theta(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4; W_1, W_2, W_3, W_4) &= \tau_1^2\tau_2^2\tau_3^2 - 4\tau_1^2\tau_2^3\tau_4 - 4\tau_1^3\tau_3^3 + 18\tau_1^3\tau_2\tau_3\tau_4 - 27\tau_1^4\tau_4^2 \\
&\quad - 4\tau_0\tau_2^3\tau_3^2 + 16\tau_0\tau_2^4\tau_4 + 18\tau_0\tau_1\tau_2\tau_3^3 - 80\tau_0\tau_1\tau_2^2\tau_3\tau_4 \\
&\quad - 6\tau_0\tau_1^2\tau_3^2\tau_4 + 144\tau_0\tau_1^2\tau_2\tau_4^2 - 27\tau_0^2\tau_3^4 + 144\tau_0^2\tau_2\tau_3^2\tau_4 \\
&\quad - 128\tau_0^2\tau_2^2\tau_4^2 - 192\tau_0^2\tau_1\tau_3\tau_4^2 + 256\tau_0^3\tau_4^3
\end{aligned}$$

Sia ora A un anello commutativo, e sia

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i X^{n-i} = a_0 X^n - a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n$$

un polinomio a coefficienti in A di grado n. Definiamo il *discriminante* di P come

$$\mathrm{disc}(P) = \overline{D}_n(a_0, a_1, \dots, a_n) \tag{6}$$

Notiamo che quando P è monico questa definizione coincide con quella data in precedenza. Se scriviamo $P(X) = \prod (b_j X - c_j)$, dove i b_j e i c_j sono elementi di qualche sovraanello commutativo di A,
$$a_i = \tau(b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n)$$
Possiamo dunque scrivere
$$\mathrm{disc}(P) = \Theta(b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n) \tag{7}$$

In particolare

$$\operatorname{disc}(P) = \begin{cases} a_1^2 - 4a_0a_2 & n=2 \\ \\ a_1^2a_2^2 - 4a_1^3a_3 - 4a_0a_2^3 + 18a_0a_1a_2a_3 - 27a_0^2a_3^2 & n=3 \\ \\ a_1^2a_2^2a_3^2 - 4a_1^2a_2^3a_4 - 4a_1^3a_3^3 + 18a_1^3a_2a_3a_4 - 27a_1^4a_4^2 - 4a_0a_2^3a_3^2 + 16a_0a_2^4a_4 \\ +18a_0a_1a_2a_3^3 - 80a_0a_1a_2^2a_3a_4 - 6a_0a_1^2a_3^2a_4 + 144a_0a_1^2a_2a_4^2 - 27a_0^2a_3^4 \\ +144a_0^2a_2a_3^2a_4 - 128a_0^2a_2^2a_4^2 - 192a_0^2a_1a_3a_4^2 + 256a_0^3a_4^3 & n=4 \end{cases}$$