**Forme bilineari**

Maurizio Cornalba

20/12/2013

Sia $K$ un campo e sia $V$ uno spazio vettoriale su $K$. Una *forma bilineare* su $V$ è una applicazione

$$\phi : V \times V \to K$$

che è lineare separatamente in ognuno dei due argomenti, tale cioè che

$$\phi(av + bu, w) = a\phi(v, w) + b\phi(u, w)$$
$$\phi(w, av + bu) = a\phi(w, v) + b\phi(w, u)$$

per ogni scelta di scalari $a, b$ e ogni scelta di $v, u, w \in V$. Quando $\phi(v, w) = \phi(w, v)$ per ogni $v$ e ogni $w$ diremo che $\phi$ è *simmetrica*. La *forma quadratica* associata a una forma simmetrica $\phi$ è

$$q(v) = \phi(v, v)$$

Se $V$ ha dimensione finita e $v_1, \dots, v_n$ è una sua base a ogni forma bilineare $\phi$ su $V$ si può associare la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & & \dots & \\ & & \dots & \\ & \dots & & q_{nn} \end{pmatrix} , \qquad q_{ij} = \phi(v_i, v_j)$$

La matrice $Q$ determina completamente $\phi$. Infatti, dati $v, w \in V$, possiamo scrivere in modo unico $v = \sum x_i v_i$, e $w = \sum y_i v_i$ e per linearità

$$\phi(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j q_{ij} = {}^tXQY$$

dove $X$ e $Y$ sono i vettori colonna

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} , \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$

La forma bilineare $\phi$ è simmetrica se e solo se la matrice $Q$ è simmetrica, cioè uguale alla sua trasposta. Infatti, se $Q$ è simmetrica,

$$\phi(v, w) = {}^tXQY = {}^t({}^tXQY) = {}^tY\,{}^tQ\,{}^t({}^tX) = {}^tYQX = \phi(w.v)$$

È facile descrivere come cambia la matrice associata a una forma bilineare quando si cambia base. Sia $w_1, \dots, w_n$ un'altra base di $V$, poniamo $p_{ij} = \phi(w_i, w_j)$ e indichiamo con $P$ la matrice i cui elementi sono i $p_{ij}$. Possiamo scrivere

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ji} v_j$$

dove $M = (m_{ij})$ è una matrice invertibile a elementi in $K$. Allora

$$p_{ij} = \phi(w_i, w_j) = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{hi} m_{kj} \phi(v_h, v_k) = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{hi} m_{kj} q_{hk}$$

In forma matriciale questa identità si scrive

$$P = {}^tMQM \tag{1}$$

Sia $\phi$ una forma bilineare simmetrica e sia $q(v) = \phi(v, v)$ la forma quadratica associata. Notiamo che

$$q(v + w) = \phi(v + w, v + w) = \phi(v, v) + \phi(w, w) + 2\phi(v, w) = q(v) + q(w) + 2\phi(v, w)$$

Ricordiamo che il campo $K$ si dice *di caratteristica 2* se $2 \cdot 1_K = 0$. Dunque la formula precedente dice che, se $K$ non ha caratteristica 2 (in particolare quando $K$ è $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$),

$$\phi(v, w) = \frac{q(v + w) - q(v) - q(w)}{2} \tag{2}$$

Questa identità, che va sotto il nome di formula di *polarizzazione*, mostra che una forma bilineare simmetrica è determinata dalla forma quadratica associata. Osserviamo che ciò è in generale falso quando $K$ ha caratteristica 2. In questo caso, ad esempio, la forma quadratica associata alla forma bilineare su $K^2$ con matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

è nulla, in quanto ${}^tXQX = 0$ per ogni $X$.

**Lemma 1.** *Se $V$ ha dimensione finita sono condizioni equivalenti:*

(i) *per ogni $v \in V$, $v \neq 0$, esiste $w \in V$ tale che $\phi(v, w) \neq 0$;*
(ii) *per ogni $v \in V$, $v \neq 0$, esiste $w \in V$ tale che $\phi(w, v) \neq 0$;*
(iii) *$Q$ è invertibile.*

*Dimostrazione.* Basta mostrare che la prima e la terza condizione sono equivalenti. Infatti la (ii) non è altro che la (i) per la forma $\psi(v, w) = \phi(w, v)$, la cui matrice è la trasposta di $Q$; d'altro canto $Q$ e ${}^tQ$ hanno lo stesso rango. Supponiamo dapprima che $Q$ sia invertibile. Ricordiamo che in forma matriciale $\phi$ si scrive

$${}^tXQY$$

Se $X \neq 0$, la sua $i$-esima componente $x_i$ non è nulla per qualche $i$. Dato che $Q$ è invertibile esiste $Y$ tale che $QY$ sia uguale a $e_i$, l'$i$-esimo vettore della base canonica di $K^n$. Allora ${}^tXQY = x_i \neq 0$. Supponiamo viceversa che $Q$ non sia invertibile, e perciò che ${}^tQ$ non sia invertibile. Dunque esiste $X \neq 0$ tale che ${}^tQX = 0$ o, trasponendo, tale che ${}^tXQ = 0$. Ma allora ${}^tXQY = 0$ per ogni $Y$. □

Nel caso in cui $V$ ha dimensione finita, se la forma bilineare $\phi$ soddisfa una delle condizioni del lemma diremo che è *non degenere*. Questa nozione si estende anche al caso in cui $V$ non ha dimensione finita; in questo caso diremo che $\phi$ è non degenere se soddisfa sia la condizione (i) che la (ii).

D'ora in poi supporremo che $\phi$ sia simmetrica. L'insieme

$$V_0 = \{v \in V : \phi(v, w) = 0 \text{ per ogni } w \in V\}$$

è un sottospazio vettoriale di $V$. Infatti è l'intersezione dei nuclei di tutte le applicazioni lineari $V \to K$ della forma $v \mapsto \phi(v, w)$, $w \in V$.

**Lemma 2.** *Sia $W$ un sottospazio di $V$ tale che $V_0 \cap W = \{0\}$ e $V_0 + W = V$. Allora la restrizione di $\phi$ a $W$ è non degenere.*

*Dimostrazione.* Se $v \neq 0$ appartiene a $W$, allora $v \notin V_0$, quindi esiste $v' \in V$ tale che $\phi(v, v') \neq 0$. Per ipotesi possiamo scrivere $v' = v_0 + w$, dove $v_0 \in V_0$ e $w \in W$. Ma allora

$$\phi(v, w) = \phi(v, w) + \phi(v, v_0) = \phi(v, v') \neq 0$$

□

Un sottospazio $W$ come nel lemma esiste sempre. In dimensione finita questo si può vedere come segue. Si sceglie una base $v_1, \ldots, v_k$ di $V_0$ e la si completa a una base $v_1, \ldots, v_n$ di $V$. Un sottospazio $W$ che soddisfa le condizioni richieste è allora quello generato da $v_{k+1}, \ldots, v_n$. La matrice di $\phi$ rispetto alla base ora scelta è della forma

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q' \end{pmatrix}$$

dove $Q'$ è la matrice della restrizione di $\phi$ a $W$. Dai lemmi 1 e 2 segue dunque che

$$\mathrm{rk}(Q) = \dim(V) - \dim(V_0)$$

Questo numero viene chiamato *rango* della forma simmetrica $\phi$ e indicato con $\mathrm{rk}(\phi)$. La dimensione di $V_0$ si chiama *nullità* di $\phi$ e si indica talvolta con $n_0$. Dunque la formula precedente si può riscrivere sotto la forma

$$\dim(V) = \mathrm{rk}(\phi) + n_0$$

Una base $\{v_i\}_{i \in I}$ di $V$ si dice *ortogonale* (rispetto a $\phi$) se $\phi(v_i, v_j) = 0$ per $i \neq j$.

**Lemma 3.** *Se $K$ ha caratteristica diversa da 2, $V$ ha dimensione finita e $\phi$ è una forma bilineare simmetrica su $V$, allora $V$ ha una base ortogonale.*

*Dimostrazione.* Se $\phi$ è la forma nulla non c'è niente da dimostrare. Se $\phi$ non è nulla ragioniamo per induzione sulla dimensione di $V$. In dimensione 1 non c'è niente da dimostrare. Sia $n$ la dimensione di $V$ e supponiamo di aver dimostrato il risultato in dimensione $n - 1$. Dato che la forma non è nulla, per la formula di polarizzazione (2) esiste $v_1 \in V$ tale che $\phi(v_1, v_1) \neq 0$. Poniamo $W = \{v \in V : \phi(v, v_1) = 0\}$; è il nucleo dell'applicazione lineare $V \to K$ data da $v \mapsto \phi(v, v_1)$ e quindi è un sottospazio di $V$. La dimensione di $W$ è $n - 1$ dato che $v_1 \notin W$. Per ipotesi induttiva $W$ ha una base ortogonale $v_2, \ldots, v_n$. Allora $v_1, \ldots, v_n$ è una base ortogonale di $V$. □

Osserviamo che quanto affermato dal lemma è falso se $K$ ha caratteristica 2. Ad esempio, in questo caso la forma bilineare su $K^2$ con matrice (3) non ammette una base ortogonale, in quanto, come si è già osservato, la forma quadratica ad essa associata è nulla.

Il lemma 3 afferma che la matrice, rispetto a una opportuna base, di una forma bilineare simmetrica è diagonale. Se si hanno ulteriori informazioni sulla natura del campo $K$ si può essere a volte più precisi. Supponiamo ad esempio che $K = \mathbb{C}$. Sia $v_1, \ldots, v_n$ una base ortogonale di $V$. Salvo riordinare la base stessa possiamo supporre che $\phi(v_i, v_i) \neq 0$ per $i \leq k$ e $\phi(v_i, v_i) = 0$ per $i > k$. Possiamo trovare numeri complessi

$c_i$ tali che $c_i^2 = \phi(v_i, v_i)^{-1}$ per $i \leq k$. Allora $\phi(c_i v_i, c_i v_i) = 1$ per $i = 1, \ldots, k$. Dunque rispetto alla base $c_1 v_1, \ldots, c_k v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ la matrice di $\phi$ è

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il caso in cui $K = \mathbb{R}$ è più interessante. Diremo che una forma bilineare $\psi$ su uno spazio vettoriale reale $U$ è *semidefinita positiva* (risp., *semidefinita negativa*) se $\psi(u, u) \geq 0$ (risp., $\psi(u, u) \leq 0$) per ogni $u \in U$. Diremo poi che $\psi$ è *definita positiva* o *definita negativa* se è semidefinita positiva o negativa e in più $\psi(u, u) = 0$ se e solo se $u = 0$.

**Lemma 4.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale reale e sia $\phi$ una forma bilineare simmetrica su $V$. Siano $U$ e $W$ due sottospazi vettoriali di $V$ tali che $\phi$ sia definita positiva su $U$ e definita negativa su $W$. Allora:*

(i) *$U \cap W = \{0\}$;*
(ii) *$\phi$ è non degenere su $U + W$.*

*Dimostrazione.* Se $u$ è un elemento non nullo di $U$, $\phi(u, u) > 0$, e quindi $u$ non può appartenere anche a $W$. Questo prova (i). Anche (ii) è facile da dimostrare. Ogni elemento di $U + W$ è della forma $u + w$, dove $u \in U$ e $w \in W$. Ma

$$\phi(u + w, u - w) = \phi(u, u) - \phi(w, w) - \phi(u, w) + \phi(w, u) = \phi(u, u) - \phi(w, w)$$

dato che $\phi$ è simmetrica. Inoltre sia $\phi(u, u)$ che $-\phi(w, w)$ sono non negativi, e quindi se $\phi(u + w, u - w) = 0$ devono essere nulli, il che per ipotesi può accadere solo se $u = w = 0$. $\square$

**Teorema 1** (Legge d'inerzia di Sylvester)**.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$ e sia $\phi$ una forma bilineare simmetrica su $V$. Data una base ortogonale $v_1, \ldots, v_n$ di $V$, indichiamo con $n_+$ (risp., con $n_-$) il numero dei $v_i$ tali che $\phi(v_i, v_i) > 0$ (risp., $\phi(v_i, v_i) < 0$). Allora $n_+$ (risp., $n_-$) è uguale alla massima tra le dimensioni dei sottospazi vettoriali di $V$ su cui $\phi$ è definita positiva (risp., definita negativa). In particolare $n_+$ e $n_-$ sono indipendenti dalla scelta di base.*

*Dimostrazione.* La forma $\phi$ è definita positiva sul sottospazio generato dai $v_i$ tali che $\phi(v_i, v_i) > 0$, che ha dimensione $n_+$, e definita negativa su quello generato dai $v_i$ tali che $\phi(v_i, v_i) < 0$, che ha dimensione $n_-$; inoltre il rango di $\phi$ è $n_+ + n_-$. D'altra parte il lemma 4 mostra che, se $\phi$ è definita positiva su $U$ e definita negativa su $W$, allora $\mathrm{rk}(\phi) \geq \dim(U) + \dim(W)$. Quindi $\dim(U)$ non può superare $n_+$ e $\dim(W)$ non può superare $n_-$. $\square$

L'intero $n_+ - n_-$ si chiama *segnatura* della forma $\phi$. Sia $v_1, \ldots, v_n$ una base ortogonale di $V$, ordinata in modo che $\phi(v_i, v_i) > 0$ per $i \leq n_+$, $\phi(v_i, v_i) < 0$ per $n_+ < i \leq n_+ + n_-$ e $\phi(v_i, v_i) = 0$ per $i > n_+ + n_-$. Poniamo $c_i = |\phi(v_i, v_i)|^{-1/2}$ per $i \leq n_+ + n_-$. Poniamo $w_i = c_i v_i$ per $i \leq n_+ + n_-$ e $w_i = v_i$ per $i > n_+ + n_-$. La matrice di $\phi$ rispetto alla base $w_1, \ldots, w_n$ è

$$\begin{pmatrix} I_{n_+} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{n_-} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Il rango di $\phi$ è $n_+ + n_-$ e

$$\dim(V) = n = n_+ + n_- + n_0$$

dove $n_0$ è la nullità della forma $\phi$.