2. Somme dirette

Siano V e W due spazi vettoriali sul campo K. Definiamo sul prodotto cartesiano di V e W una operazione di somma ponendo

$$(v,w)+(v',w')=(v+v',w+w') \quad \text{per ogni scelta di } v,v'\in V \text{ e } w,w'\in W$$

e un prodotto per elementi di K ponendo

$$k(v,w)=(kv,kw) \quad \text{per ogni } v\in V, \text{ ogni } w\in W \text{ e ogni } k\in K\,.$$

Lasciamo al lettore la semplice verifica del fatto che $V\times W$, con queste operazioni, diviene uno spazio vettoriale su K, che viene chiamato *somma diretta* di V e W e indicato con $V\oplus W$. In modo analogo, dati spazi vettoriali $V_1,\dots,V_n$ su K, si può definire una struttura di K-spazio vettoriale sul prodotto cartesiano $V_1\times\cdots\times V_n$. Lo spazio vettoriale che ne risulta viene chiamato somma diretta di $V_1,\dots,V_n$ e indicato con $V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_n$. Si può osservare che lo spazio vettoriale K^n non è altro che la somma diretta di n copie di K, visto come spazio vettoriale su se stesso.

L'applicazione $(v,w)\mapsto(w,v)$ da $V\times W$ a $W\times V$ definisce un isomorfismo di spazi vettoriali $V\oplus W\to W\oplus V$. La semplice verifica è lasciata al lettore, così come quella dei seguenti fatti. Se U è un altro spazio vettoriale su K, la mappa $((v,w),u)\mapsto(v,(w,u))$ definisce un isomorfismo $(V\oplus W)\oplus U\to V\oplus(W\oplus U)$. Se $V_1,\dots,V_n$ sono spazi vettoriali su K, la mappa $(v_1,v_2,\dots,v_n)\mapsto(v_1,(v_2,(v_3,(\dots,(v_{n-1},v_n)\,)$ definisce un isomorfismo da $V_1\oplus\cdots\oplus V_n$ a $V_1\oplus(V_2\oplus(V_3\oplus(\cdots\oplus(V_{n-1}\oplus V_n)\,)$. Questi isomorfismi permettono di ridurre la maggior parte delle questioni riguardanti arbitrarie somme dirette a questioni riguardanti somme dirette di due soli spazi vettoriali.

La mappa $V\to V\oplus W$ data da $v\mapsto(v,0)$ è lineare ed iniettiva, e consente di identificare V con il sottospazio di $V\oplus W$ costituito da tutti gli elementi della forma $(v,0)$. Allo stesso modo possiamo identificare W con l'insieme di tutti gli elementi di $V\oplus W$ della forma $(0,w)$. Con queste identificazioni possiamo scrivere $v+w$ in luogo di (v,w).

Se V e W hanno dimensione finita, la loro somma diretta ha dimensione

$$\dim(V\oplus W)=\dim(V)+\dim(W)\,.$$

Più esattamente, se $v_1,\dots,v_n$ è una base di V, e $w_1,\dots,w_m$ una di W, una base di $V\oplus W$ è $(v_1,0),\dots,(v_n,0),(0,w_1),\dots,(0,w_m)$. In effetti, se (v,w) è un qualsiasi elemento di $V\oplus W$, possiamo scrivere $v=\sum a_iv_i$, $w=\sum b_jw_j$, e quindi $(v,w)=\sum a_i(v_i,0)+\sum b_j(0,w_j)$. D'altra parte dire che $\sum a_i(v_i,0)+\sum b_j(0,w_j)=0$ equivale a dire che $(\sum a_iv_i,\sum b_jw_j)=0$, cioè che $\sum a_iv_i=0$ e $\sum b_jw_j=0$. Dato che i v_i e i w_j sono indipendenti, ciò implica che tutti gli a_i e tutti i b_j sono nulli.

Siano ora V_1 e V_2 sottospazi di uno stesso spazio vettoriale V. Come si verifica facilmente, l'applicazione $\varphi: V_1\oplus V_2\to V$ data da $\varphi(v_1,v_2)=v_1+v_2$ è lineare e ha come immagine V_1+V_2. Calcoliamo il nucleo di φ. Dire che $\varphi(v_1,v_2)=0$ equivale a dire che $v_1+v_2=0$, cioè che $v_1\in V_1\cap V_2$ e che $v_2=-v_1$. Dunque il nucleo di φ è isomorfo a $V_1\cap V_2$. Ne segue che, se $V_1\cap V_2=0$, la mappa φ identifica $V_1\oplus V_2$ a V_1+V_2. In questo caso diremo, in modo un po' improprio, che V_1+V_2 è somma diretta di V_1 e V_2, e scriveremo a volte $V_1\oplus V_2$ invece di V_1+V_2.