7. La forma canonica di Jordan

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K, e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare. Ricordiamo che f si dice nilpotente se vi è un intero k tale che $f^k = 0$. Analogamente, una matrice quadrata si dice nilpotente se una sua potenza è nulla.

PROPOSIZIONE (7.1). *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo K, e sia $f : V \to V$ un endomorfismo nilpotente. Vi è una base di V rispetto alla quale la matrice di f è la matrice diagonale a blocchi*

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & & \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & \\ \dots & 0 & A_3 & 0 & \dots \\ & & \dots & & \\ & & \dots & 0 & A_m \end{pmatrix},$$

dove ogni A_i è della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & & & \\ \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & & \\ & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \\ & & \dots & & \dots & & \\ & & & \dots & 0 & 1 & \\ & & & & \dots & 0 & \end{pmatrix}$$

Per dimostrare la proposizione ragioniamo come segue. Se $f = 0$ non vi è nulla da dimostrare. Se $f \neq 0$ sia k l'intero tale che $f^k = 0$ ma $f^{k-1} \neq 0$. Poniamo $V_i = \ker(f^i)$. Chiaramente

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{k-1} \subset V_k = V\,.$$

Inoltre tutte queste inclusioni sono strette. Se infatti fosse $V_{i-1} = V_i$, con $i \leq k$, si avrebbe che $V_i = f^{-1}(V_{i-1}) = f^{-1}(V_i) = V_{i+1}$, e dunque $V_{i-1} = V_i = V_{i+1} = \cdots = V$, da cui $i - 1 \geq k$, in contraddizione con quanto supposto. L'osservazione cruciale è che, se $i > 1$ e $v_1, \dots, v_h$ sono elementi di V_i che sono indipendenti modulo V_{i-1}, allora $f(v_1), \dots, f(v_h)$ sono indipendenti modulo V_{i-2}. Supponiamo infatti che $\sum a_i f(v_i) \in V_{i-2}$. Allora $f^{i-1}(\sum a_i v_i) = 0$, e quindi $\sum a_i v_i$ appartiene a V_{i-1}. Dato che i v_i sono indipendenti modulo V_{i-1} se ne deduce che tutti gli a_i sono nulli.

Possiamo ora costruire la base richiesta. Scegliamo una base $v_{k,1}, \dots, v_{k,m_k}$ di $V = V_k$ modulo V_{k-1}, poi scegliamo vettori $v_{k-1,1}, \dots, v_{k-1,m_{k-1}}$ di V_{k-1} in modo che

$$f(v_{k,1}), \dots, f(v_{k,m_k}), v_{k-1,1}, \dots, v_{k-1,m_{k-1}}$$

sia una base di V_{k-1} modulo V_{k-2}, poi vettori $v_{k-2,1}, \dots, v_{k-2,m_{k-2}}$ di V_{k-2} in modo che

$$f^2(v_{k,1}), \dots, f^2(v_{k,m_k}), f(v_{k-1,1}), \dots, f(v_{k-1,m_{k-1}}), v_{k-2,1}, \dots, v_{k-2,m_{k-2}}$$

sia una base di V_{k-2} modulo V_{k-3}, e così via. L'unione delle basi dei V_i modulo V_{i-1} così ottenute è una base di V, che basta riordinare per trovare la base cercata. Per esempio, una base con le caratteristiche desiderate è

$$\begin{aligned} &f^{k-1}(v_{k,1}), f^{k-2}(v_{k,1}), \dots, v_{k,1}, \dots, f^{k-1}(v_{k,m_k}), \dots, v_{k,m_k}, \\ &\qquad f^{k-2}(v_{k-1,1}), \dots, v_{k-1,1}, \dots, f^{k-2}(v_{k-1,m_{k-1}}), \dots, v_{k-1,m_{k-1}}, \dots, v_{1,1}, \dots, v_{1,m_1}\,. \end{aligned}$$

Questo dimostra (7.1).

Vogliamo ora applicare la proposizione (7.1) allo studio di un endomorfismo di uno spazio vettoriale complesso. In generale, se λ è uno scalare chiameremo *blocco di Jordan* di dimensione n e autovalore λ la matrice $n \times n$

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & & & \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & & \\ \dots & 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & \\ & & \dots & & \dots & & \\ & & \dots & 0 & \lambda & 1 & \\ & & & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Teorema (7.2) (Forma canonica di Jordan). *Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita, e sia $f : V \to V$ un endomorfismo di V. Vi è una base di V rispetto alla quale la matrice di f è diagonale a blocchi, con blocchi di Jordan sulla diagonale.*

Una matrice diagonale a blocchi, con blocchi di Jordan sulla diagonale, verrà detta *in forma canonica di Jordan*. La proposizione (7.1) afferma che, rispetto a una base opportuna, la matrice di un endomorfismo nilpotente è in forma canonica di Jordan, e che inoltre i suoi blocchi diagonali sono tutti del tipo $J_n(0)$; questo è vero su qualsiasi campo base, e non solo su $\mathbb{C}$.

Indichiamo con $P(X)$ il polinomio caratteristico di f, e sia

$$P(X) = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{k_i}$$

la sua decomposizione in fattori irriducibili, dove i λ_i sono numeri complessi distinti. Il corollario (5.8) ci assicura che

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m\,,$$

dove

$$V_i = \ker((f - \lambda_i \mathbf{1}_V)^{k_i})\,.$$

I V_i sono sottospazi invarianti per f. Quindi, se $v_{i,1} \dots, v_{i,n_i}$ è una base di V_i,

$$v_{1,1} \dots, v_{1,n_1}, v_{2,1} \dots, v_{2,n_2}, \dots, v_{m,1} \dots, v_{m,n_m}$$

è una base di V rispetto alla quale la matrice di f è diagonale a blocchi della forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & & \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & \\ \dots & 0 & A_3 & 0 & \dots \\ & & \dots & & \\ & & \dots & 0 & A_m \end{pmatrix},$$

dove A_i è la matrice, rispetto alla base $v_{i,1} \dots, v_{i,n_i}$, dell'endomorfismo f_i di V_i indotto da f per restrizione. Basterà dunque mostrare che si possono scegliere le basi $v_{i,1} \dots, v_{i,n_i}$ in modo che le matrici A_i siano in forma canonica di Jordan. La definizione stessa di V_i dice che $g_i = f_i - \lambda_i \mathbf{1}_{V_i}$ è nilpotente; (7.1) ci assicura allora che vi è una base $v_{i,1} \dots, v_{i,n_i}$ di V_i rispetto alla quale la matrice B_i di g_i è in forma canonica di Jordan. Rispetto a questa stessa base, la matrice di f_i è $B_i + \lambda_i I$, che è anch'essa in forma canonica di Jordan. Questo dimostra (7.2).

Va osservato che, se $f : V \to V$ è un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K qualsiasi, non è detto che si possa trovare una base di V rispetto alla quale la matrice A di f sia in forma canonica di Jordan. In effetti, se questo è possibile, il polinomio caratteristico di f, che indichiamo con $P(X)$, è della forma $\prod(X - \lambda_i)$, dove i λ_i sono i termini diagonali di A, e dunque si fattorizza, in $K[X]$, in fattori di grado 1. Se si suppone, viceversa, che $P(X)$ sia fattorizzabile su K in fattori lineari, come accade sempre nel caso complesso, la dimostrazione di (7.2) funziona ancora, senza alcuna modifica, e mostra che, rispetto a una opportuna base, la matrice di f è in forma canonica di Jordan.