

Corso di Algebra Lineare - a.a. 2010-2011

Prova scritta del 22.2.2011

Compito A

1. Dati i vettori in  $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-t \\ -t \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove  $t$  è un parametro reale, sia  $U$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  generato da  $v_1$  e  $v_2$ , e  $W$  quello generato da  $v_3$  e  $v_4$ . Per ogni valore di  $t$  si calcolino le dimensioni di  $U$ ,  $W$ ,  $U + W$  e  $U \cap W$ .

2. Sia  $\Pi$  il piano in  $\mathbb{R}^3$  di equazione

$$x + y + z = 0$$

e sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \Pi$  la proiezione ortogonale (rispetto al prodotto scalare euclideo).

(a) Posto

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si mostri che  $\{v_1, v_2\}$  è una base di  $\Pi$ .

(b) Scrivere la matrice di  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$  e a  $\{v_1, v_2\}$ .

3. Si considerino le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ k+2 & 1 & 0 \\ 5 & k-1 & 1 \end{pmatrix}$$

dove  $k$  è un parametro reale.

(a) Determinare i valori di  $k$  per cui  $B$  è diagonalizzabile e, per tali valori, dare una base di autovettori.

(b) Determinare per quali valori di  $k$  le matrici  $A$  e  $B$  sono simili.

4. Sia  $V$  lo spazio vettoriale delle matrici reali  $n \times n$ , e sia  $F : V \rightarrow V$  l'applicazione (lineare) definita da

$$F(A) = A - {}^tA$$

(a) Trovare il rango di  $F$ .

(b) Trovare gli autovalori di  $F$  e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

%%%

Ogni risposta va giustificata.

Su ogni foglio dell'elaborato vanno indicati nome, cognome e numero di matricola.

*Soluzioni*

1. I vettori  $v_3$  e  $v_4$  sono sempre indipendenti, quindi  $\dim(W) = 2$  per ogni  $t$ . Invece  $v_1$  e  $v_2$  sono proporzionali solo per  $t = 1$ . Quindi  $\dim(U)$  vale 2 se  $t \neq 1$  e vale 1 se  $t = 1$ . Per eliminazione Gaussiana si mostra che il rango della matrice le cui colonne sono  $v_1, v_2, v_3, v_4$  è 4, a meno che  $t = \pm 1$ , nel qual caso vale 3. Ne segue che  $\dim(U + W) = 4$  per  $t \neq \pm 1$ , mentre  $\dim(U + W) = 3$  per  $t = \pm 1$ . La dimensione di  $U \cap W$  si può calcolare tramite la formula di Grassmann  $\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W)$ , e vale quindi  $0 = 2 + 2 - 4$  se  $t \neq \pm 1$ ,  $0 = 1 + 2 - 3$  se  $t = 1$ , e  $1 = 2 + 2 - 3$  se  $t = -1$ .

2. (a) I vettori  $v_1$  e  $v_2$  sono indipendenti e soddisfano l'equazione di  $\Pi$ .

(b) Sia  $e_1, e_2, e_3$  la base standard di  $\mathbb{R}^3$ . Il vettore  $\nu = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  è ortogonale a  $\Pi$ . Dunque  $f(e_i)$  è della forma  $e_i + k\nu$  e appartiene a  $\Pi$ . Ne segue che

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2, \\ f(e_2) &= \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}v_1 - \frac{2}{3}v_2, \\ f(e_3) &= \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2. \end{aligned}$$

e quindi che la matrice di  $f$  è

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

3. La matrici  $A$  e  $B$  sono triangolari e quindi i loro autovalori sono i termini diagonali. Ne segue che gli autovalori di  $A$  e  $B$  sono 3, con molteplicità 1, e 1, con molteplicità 2. La matrice  $B$  è diagonalizzabile se e solo se la dimensione dell'autospazio di 1 è 2. L'equazione degli autovettori

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

equivale a

$$\begin{aligned} 3x &= x \\ (k+2)x + y &= y \\ 5x + (k-1)y + z &= z \end{aligned}$$

che dà  $x = 0$ , e anche  $y = 0$  a meno che  $k = 1$ . Ciò mostra che l'autospazio di 1 ha dimensione 1 tranne che per  $k = 1$ , quando ha dimensione 2. Dunque  $B$  è diagonalizzabile solo per  $k = 1$ .

In questo caso una base di autovettori è ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} \text{ (per l'autovalore 3), } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (per l'autovalore 1).}$$

La matrice  $A$  è sempre diagonalizzabile, e quindi simile alla matrice

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi è simile a  $B$  se e solo se questa è simile a  $\Delta$ , cioè diagonalizzabile. Questo accade se e solo se  $k = 1$ .

4. Se  $A$  è antisimmetrica,  $F(A) = 2A$ . Se  $A$  è simmetrica,  $F(A) = 0$ . Lo spazio  $\mathcal{A}$  delle matrici antisimmetriche è quindi contenuto nell'autospazio  $V_2$  e quello  $\mathcal{S}$  delle matrici simmetriche nell'autospazio  $V_0$ . Inoltre  $\mathcal{A}$  ha dimensione  $(n^2 - n)/2$  e  $\mathcal{S}$  ha dimensione  $(n^2 + n)/2$ . Ma  $\dim(V_2) + \dim(V_0) \leq \dim(V) = n^2$ , mentre  $\dim(\mathcal{A}) + \dim(\mathcal{S}) = n^2$ . L'unica possibilità è dunque che  $\mathcal{A} = V_2$  e  $\mathcal{S} = V_0$ . La conclusione è che gli autovalori di  $F$  sono 0 e 2, con molteplicità (algebraica e geometrica) uguale rispettivamente a  $(n^2 + n)/2$  e  $(n^2 - n)/2$ .