Corso di Algebra Lineare - a.a. 2010-2011

Prova scritta del 21.9.2011

Compito B

1. Si consideri lo spazio V dei polinomi di grado minore o uguale a 6 e sia $f\colon V \to V$ l'applicazione lineare che associa ad ogni polinomio la sua derivata seconda.
   (a) Si mostri che $\mathcal{B} = \{1+x, x+x^2, x^2+x^3, x^3+x^4, x^4+x^5, x^5+x^6, x^6+1\}$ è una base di V.
   (b) Si calcoli la matrice dell'applicazione f rispetto alla base $\mathcal{V}$ (in partenza) e $\mathcal{W}$ (in arrivo) nei seguenti casi:
      i. $\mathcal{V} = \mathcal{B}$ e $\mathcal{W} = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\}$;
      ii. $\mathcal{V} = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\}$ e $\mathcal{W} = \mathcal{B}$.
   (c) Si descriva il sottospazio $f(V)$ di V.

2. Si consideri il sistema lineare in tre incognite

$$\begin{cases} (1+t)x_1 - x_2 + (1+t)x_3 = 0 \\ -x_1 + (2+t)x_2 + (-2-t)x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

   dove t è un parametro reale.
   (a) Determinare i valori di t per i quali il sistema non ammette soluzioni.
   (b) Determinare i valori di t per i quali il sistema ammette soluzione unica.
   (c) Per tutti i rimanenti valori di t determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni.

3. Si consideri la matrice complessa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Trovare polinomio caratteristico, autovalori e autospazi di A.
   (b) La matrice A è diagonalizzabile?
   (c) Trovare il polinomio minimo di A.

4. In $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare euclideo si consideri l'iperpiano Λ definito dall'equazione $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Sia ℓ la retta perpendicolare a Λ passante per $(1, 1, 0, -1)$.
   (a) Si scrivano equazioni parametriche e cartesiane di ℓ.
   (b) Si determini la proiezione ortogonale del punto $P = (1, 1, 1, 0)$ su Λ.

%%

1. (a) $(1+x)-(x+x^2)+(x^2+x^3)-(x^3+x^4)+(x^4+x^5)-(x^5+x^6)+(x^6+1)=2$, $(x+x^2)-(x^2+x^3)+(x^3+x^4)-(x^4+x^5)+(x^5+x^6)-(x^6+1)+(1+x)=2x$, $(x^2+x^3)-(x^3+x^4)+(x^4+x^5)-(x^5+x^6)+(x^6+1)-(1+x)+(x+x^2)=2x^2$, e così via. Dunque $\mathcal{B}$ genera V, ed è una base perchè contiene $\dim(V)$ elementi.

   (b) $f(1)=0$, $f(x)=0$, $f(x^2)=2\cdot 1$, $f(x^3)=6\cdot x$, $f(x^4)=12\cdot x^2$, $f(x^5)=20\cdot x^3$, $f(x^6)=30\cdot x^4$. Quindi:

      i. la matrice è

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

      ii. ricordando le formule del punto (a), la matrice è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & -6 & 10 & -15 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 6 & -10 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 & 10 & -15 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -6 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 & -10 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -6 & 10 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 & -10 & 15 \end{pmatrix}$$

   (c) $f(V)$ è lo spazio dei polinomi di grado ≤ 4.

2. La matrice del sistema omogeneo associato ha determinante nullo per $t=0$ e $t=-1$, e determinante non nullo per tutti gli altri valori di t. Quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ammette una e una sola soluzione per $t\neq 0,-1$. Quando $t=-1$ le ultime due equazioni del sistema si riducono a

$$\begin{cases} -x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$$

che sono incompatibili; in questo caso, quindi, il sistema non ha soluzioni. Per $t=0$ la matrice del sistema omogeneo associato e quella orlata con la colonna dei termini noti diventano

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che hanno entrambe rango 2. Quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ammette soluzioni e queste formano uno spazio (affine) di dimensione 1.

3. (a) Il polinomio caratteristico è $P(X) = \det(XI - A) = X^3 - 2X^2 + X = X(X-1)^2$. Quindi gli autovalori sono 1 con molteplicità 2 e 0 con molteplicità 1. L'autospazio dell'autovalore 1 e quello dell'autovalore 0 sono generati, rispettivamente, da

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) La matrice A non è diagonalizzabile perchè l'autovalore 1 ha molteplicità 2 ma il suo autospazio ha dimensione 1.

(c) Il polinomio minimo divide il polinomio caratteristico di A e ogni autovalore di A è sua radice. Quindi il polinomio minimo può solo essere $P(X) = X(X-1)^2$ o $Q(X) = X(X-1)$. Se il polinomio minimo fosse $Q(X)$, che ha radici semplici, A sarebbe diagonalizzabile, contro quanto abbiamo dimostrato. Quindi il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico $P(X)$.

4. (a) Equazioni parametriche:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Equazioni cartesiane:

$$x_1 - 1 = -x_2 + 1 = x_3$$
$$x_4 = -1$$

(b) La proiezione è il punto della forma

$$Q = P + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che appartiene a Λ. Dunque deve essere $(1+t) - (1-t) + (1+t) = 0$, cioè $t = -1/3$. Quindi

$$Q = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$