Corso di Algebra Lineare - a.a. 2010-2011

Prova scritta del 8.2.2011

Compito A

1. Si consideri il sistema di equazioni lineari nelle incognite reali x, y, z, w, dipendente dal parametro reale t:

$$\begin{cases} -x+y+z=-1 \\ x-ty+z-2tw=3 \\ tx-y+tz-2w=-3 \end{cases}$$

   (a) trovare i valori di t per i quali il sistema non ha soluzioni;

   (b) per ogni altro valore di t determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni.

2. In $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare euclideo, sia V la retta con rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x_1 = 1+t \\ x_2 = -1+2t \\ x_3 = -t \\ x_4 = 1-t \end{cases}$$

   Sia W un sottospazio affine ortogonale a V passante per il punto p di coordinate $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$.

   (a) quali sono le dimensioni possibili per W?

   (b) dare una rappresentazione parametrica di W, quando questo ha dimensione massima possibile.

3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3t+3 & 4t+4 \\ -2t-1 & -3t-1 \end{pmatrix}$$

   dove t è un parametro reale.

   (a) dire per quali valori di t la matrice A è diagonalizzabile;

   (b) quando A è diagonalizzabile trovarne autovalori e basi per gli autospazi;

   (c) quando A non è diagonalizzabile trovare una matrice triangolare che sia simile ad A.

4. Sia A una matrice complessa quadrata tale che $A^5 + A = 0$.

   (a) La matrice A è diagonalizzabile?

   (b) Se A è una matrice reale, è diagonalizzabile sui reali?

   (c) quali sono i possibili autovalori di A?

%%

Ogni risposta va giustificata.

Su ogni foglio dell'elaborato vanno indicati nome, cognome e numero di matricola.

Soluzioni

1. Il sistema ha come matrice completa

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -t & 1 & -2t & 3 \\ t & -1 & t & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

che tramite eliminazione gaussiana per righe si riduce prima a

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1-t & 2 & -2t & 2 \\ 0 & t-1 & 2t & -2 & -3-t \end{pmatrix}$$

e poi a

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1-t & 2 & -2t & 2 \\ 0 & 0 & 2t+2 & -2t-2 & -1-t \end{pmatrix}$$

Dunque per $t \neq \pm 1$ la matrice del sistema omogeneo associato ha rango 3, e quindi il sistema ha soluzioni, che dipendono da $1 = 4 - 3$ parametri. Per $t = \pm 1$ la matrice del sistema omogeneo associato ha rango 2. Per $t = -1$ la matrice A si riduce a

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2. In questo caso il sistema ha quindi soluzioni, che dipendono da $2 = 4 - 2$ parametri. Infine per $t = 1$ la matrice A diventa

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3. In questo caso dunque il sistema non ha soluzioni.

2. (a) $0, 1, 2, 3$.

   (b) Il sottospazio in questione ha una rappresentazione parametrica della forma

   $$(s_1, s_2, s_3) \mapsto p + s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3 \,,$$

   dove v_1, v_2, v_3 sono vettori indipendenti ortogonali a

   $$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Per un vettore

   $$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

la relazione di ortogonalità $\langle v, w \rangle = 0$ è:

$$a + 2b - c - d = 0\,.$$

Tre soluzioni indipendenti di questa equazione lineare sono:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. (a) Il polinomio caratteristico di A è

$$X^2 - 2X + 1 - t^2 = (X - 1 - t)(X - 1 + t)\,.$$

Quindi gli autovalori di A sono $1 + t$ e $1 - t$. Quando $t \neq 0$, sono distinti, e dunque A è diagonalizzabile. Quando $t = 0$, se A fosse diagonalizzabile ci sarebbe una matrice B tale che $B^{-1}AB = I$. Ma allora $A = BIB^{-1} = I$, il che è falso. Dunque, per $t = 0$, A non è diagonalizzabile.

(b) Gli autospazi di $1+t$ e $1-t$ hanno dimensione uno. Quindi basta trovare un autovettore per ognuno dei due autovalori. Un autovettore per $1 + t$ è una soluzione non nulla del sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 + t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

ad esempio

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un autovettore per $1 - t$ è una soluzione non nulla del sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 - t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

ad esempio

$$\begin{pmatrix} -2t - 2 \\ 2t + 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Quando $t = 0$ ogni autovalore di A è proporzionale a $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia B una qualsiasi matrice 2×2 non singolare la cui prima colonna sia v, ad esempio

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora $B^{-1}AB$ è triangolare superiore, perchè ha come prima colonna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per la matrice B particolare scelta sopra si ha che

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. (a) Il polinomio minimo di A divide $P(X) = X^5 + X = X(X^4 + 1)$, che ha cinque radici distinte, cioè 0 e le quattro radici quarte di -1. Dunque il polinomio minimo di A non ha radici multiple, e quindi A è diagonalizzabile.

   (b) Non è detto. Se A ha autovalori non reali, non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Poiché il solo autovalore reale possibile per A è 0, una A reale è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ se e solo se è nulla. Un controesempio alla diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ è fornito dalla matrice di una rotazione di $\pi/4$ intorno all'origine di $\mathbb{R}^2$, cioè da

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

   Si ha che $A^4 = -I$, quindi $A^5 + A = 0$.

   (c) I possibili autovalori di A sono le radici di $P(X)$, cioè 0 e le quattro radici quarte di -1.