Corso di Algebra lineare - a.a. 2004-2005

Prova scritta del 31.1.2005

Compito **A**

1. Sia $Oxyz$ un riferimento ortonormale in uno spazio euclideo reale di dimensione 3. Sia π il piano di equazione $3y - z - x = 3$, r la retta di equazioni

$$\begin{cases} y + z - 3x = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

e C il punto di coordinate $(1, 2, 1)$.

(a) Determinare la posizione relativa di r e π e scrivere l'equazione della sfera S di centro C e raggio 3;

(b) scrivere equazioni cartesiane per le rette passanti per C ed ortogonali a r e calcolare la distanza di r dalla sfera S;

(c) dare equazioni cartesiane per i piani (se ne esistono) paralleli a π e tangenti a S.

Punti (3+4+4)

2. Si consideri il sistema di tre equazioni lineari reali in tre incognite, dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} 3x - (h + 2)y + 3z = h + 5 \\ hx - y + hz = h^2 + 1 \\ 2hx - 2y - 2z = 4 \end{cases}$$

e sia A_h la matrice dei coefficienti del sistema.

(a) Studiare la risolubilità del sistema al variare di h.

(b) Scrivere le equazioni dello spazio delle soluzioni nei casi in cui questo ha dimensione positiva.

(c) A_0 è diagonalizzabile?

(d) Trovare autovalori e autospazi di A_0.

Punti (3+3+3+3)

3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo K, e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare.

(a) Si mostri che, se $f^2(V) \neq f(V)$, allora f non è iniettiva e non è diagonalizzabile.

(b) Si mostri che esiste un intero positivo n tale che $f^{n+1}(V) = f^n(V)$.

(c) Si mostri che, se $f^{n+1}(V) = f^n(V)$ per qualche n, allora $f^h(V) = f^n(V)$ per ogni $h \geq n$.

(d) Sia n come in (b), e si ponga $W = f^n(V)$. Si mostri che la molteplicità di 0 come radice del polinomio caratteristico di f è uguale a $\dim V - \dim W$.

Punti (2+2+1+2)

%%

Ogni risposta va giustificata.

Su ogni foglio dell'elaborato vanno indicati nome e cognome dello studente. Sul primo foglio va indicato il corso di laurea (Matematica o Fisica), e se si tratta di laurea triennale o quadriennale.

Corso di Algebra lineare - a.a. 2004-2005

Prova scritta del 31.1.2005

Compito **B**

1. Sia $Oxyz$ un riferimento ortonormale in uno spazio euclideo reale di dimensione 3. Sia π il piano di equazione $3y - x + 3z = 8$, r la retta di equazioni

$$\begin{cases} 3y + x + z = 7 \\ y - z + x = -1 \end{cases}$$

e C il punto di coordinate $(2, 6, 5)$.

   (a) Determinare la posizione relativa di r e π e scrivere l'equazione della sfera S di centro C e raggio 2;

   (b) scrivere equazioni cartesiane per la retta passante per C, incidente e ortogonale a r, e calcolare la distanza di r dalla sfera S;

   (c) dare equazioni cartesiane per i piani (se ne esistono) paralleli a π e tangenti a S.

   Punti (3+4+4)

2. Si consideri il sistema di tre equazioni lineari reali in tre incognite, dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} 2hy - 2z = 4 \\ (h+5)x + 3y - (h+2)z = h + 5 \\ (h+1)x + 3hy - 3z = h^2 + 5 \end{cases}$$

e sia A_h la matrice dei coefficienti del sistema.

   (a) Studiare la risolubilità del sistema al variare di h.

   (b) Scrivere le equazioni dello spazio delle soluzioni nei casi in cui questo ha dimensione positiva.

   (c) A_0 è diagonalizzabile?

   (d) Trovare autovalori e autospazi di A_0.

   Punti (3+3+3+3)

3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo K, e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare.

   (a) Si mostri che, se $f^2(V) \neq f(V)$, allora f non è iniettiva e non è diagonalizzabile.

   (b) Si mostri che esiste un intero positivo n tale che $f^{n+1}(V) = f^n(V)$.

   (c) Si mostri che, se $f^{n+1}(V) = f^n(V)$ per qualche n, allora $f^h(V) = f^n(V)$ per ogni $h \geq n$.

   (d) Sia n come in (b), e si ponga $W = f^n(V)$. Si mostri che la molteplicità di 0 come radice del polinomio caratteristico di f è uguale a $\dim V - \dim W$.

   Punti (2+2+1+2)

%%%

Ogni risposta va giustificata.

Su ogni foglio dell'elaborato vanno indicati nome e cognome dello studente. Sul primo foglio va indicato il corso di laurea (Matematica o Fisica), e se si tratta di laurea triennale o quadriennale.