Corso di Algebra lineare - a.a. 2004-2005
Prova scritta del 31.1.2005 – soluzioni

Compito **A**

1. (a) Un vettore direttore della retta è $(1,1,2)$ mentre i vettori ortogonali al piano (cioè alla sua giacitura) sono generati da $(-1,3,-1)$. Poiché il loro prodotto scalare è 0, la giacitura della retta è contenuta in quella del piano e i due sono quindi paralleli. Un'equazione cartesiana di S è $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.

   (b) Il punto C appartiene alla retta (come si verifica facilmente). Esistono perciò infinite rette ortogonali a r per C, tutte contenute nel piano $x+y+2z-5=0$ (piano ortogonale a r per il punto C). Per trovare una seconda equazione cartesiana basterà considerare un qualunque piano del fascio proprio per r, da cui si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} x+y+2z-5=0 \\ \lambda(y+z-3x)+\mu(x+y-z-2)=0. \end{cases}$$

   Tutte queste intersecano la sfera (in due punti), perciò la distanza richiesta è 0.

   (c) Nel fascio improprio di piani paralleli a π, $3y-z-x+d=0$, basta scegliere i piani distanti da C quanto il raggio della sfera:

$$\frac{|6-1-1+d|}{\sqrt{1+9+1}}=3$$

   per ottenere le due equazioni $3y-z-x-4+3\sqrt{11}=0$, $3y-z-x-4-3\sqrt{11}=0$.

2. (a) La matrice A_h dei coefficienti e il vettore B_h dei termini noti del sistema sono:

$$A_h=\begin{pmatrix} 3 & -h-2 & 3 \\ h & -1 & h \\ 2h & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_h=\begin{pmatrix} h+5 \\ h^2+1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

   e $\det A_h=-2(h+3)(h+1)(h-1)$. Quindi per $h\neq 1,-1,-3$ il sistema ha soluzione unica.
   Per $h=1$, il rango di A_h è 2, ed è uguale al rango di A_h orlata con B_h, quindi il sistema è risolubile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione $3-\text{rank}A_h=1$.
   Per $h=-1$, il rango di A_h è 2, ed è uguale al rango di A_h orlata con B_h, quindi il sistema è risolubile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione $3-\text{rank}A_h=1$.
   Per $h=-3$, il rango di A_h è 2, mentre il rango della matrice orlata è 3, quindi il sistema non ha soluzioni.

   (b) Per $h=1$ lo spazio delle soluzioni ha equazioni:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ z=0 \end{cases}$$

   Per $h=-1$ lo spazio delle soluzioni ha equazioni:

$$\begin{cases} 2y=1 \\ 2x+2z=3 \end{cases}$$

   (c)

$$A_0=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

   Gli autovalori sono $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=-2$. Siccome sono tutti distinti, la matrice è diagonalizzabile.

   (d) Gli autospazi associati hanno equazioni:

$$V_1=\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad V_2=\begin{cases} x-2y=0 \\ z+2y=0 \end{cases} \quad V_3=\begin{cases} 5x-3z=0 \\ y=0 \end{cases}$$

3. (a) Se f è iniettiva è anche suriettiva, dato che V ha dimensione finita; quindi $V=f(V)$. Applicando f a entrambe i lati si ottiene $f(V)=f^2(V)$. Se f è diagonalizzabile esiste una base $\{v_1,\dots,v_m\}$ di V tale che $f(v_i)=\lambda_i v_i$, dove i λ_i sono scalari. Possiamo supporre, eventualmente riordinando gli elementi della base, che ci sia un k tale che $\lambda_i=0$ per $i<k$ e $\lambda_i\neq 0$ per $i\geq k$. Allora $f(v)$ è generato dagli $f(v_i)=\lambda_i v_i$ con $i\geq k$, e quindi da $v_k,\dots,v_m$. Analogamente, $f^2(V)$ è generato dagli $f^2(v_i)=\lambda_i^2 v_i$ con $i\geq k$, e quindi da $v_k,\dots,v_m$. Dunque $f(V)=f^2(V)$.

(b) Dato che $f^{n+1}(V) \subset f^n(V)$, $\dim f^{n+1}(V) \le \dim f^n(V)$. Visto che V ha dimensione finita, $\dim f^n(V)$ non può decrescere indefinitamente al crescere di n. Quindi c'è n tale che $\dim f^{n+1}(V) = \dim f^n(V)$, e quindi $f^{n+1}(V) = f^n(V)$.

(c) Se $f^{n+1}(V) = f^n(V)$, applicando f a entrambe i lati si ottiene che $f^{n+2}(V) = f^{n+1}(V)$, e quindi $f^{n+2}(V) = f^n(V)$. Ripetendo il procedimento si ottiene $f^h(V) = f^{h-1} = \dots f^{n+1} = f^n(V)$.

(d) Scriviamo il polinomio caratteristico $P(X)$ di f sotto la forma $X^a Q(X)$, dove 0 non è radice di $Q(X)$. Visto che X^a e $Q(X)$ sono primi fra loro e $P(f) = 0$ per il teorema di Cayley-Hamilton, V è somma diretta di $V_1 = \ker f^a$ e $V_2 = \ker Q(f)$; inoltre $f(V_i) \subset V_i$, per $i = 1, 2$, e quindi f dà, per restrizione, applicazioni lineari $f_1 : V_1 \to V_1$ e $f_2 : V_2 \to V_2$. Indichiamo con $P_i(X)$ il polinomio caratteristico di f_i. Allora $P(X) = P_1(X)P_2(X)$. D'altra parte il polinomio minimo di f_1 divide X^a e quello di f_2 divide $Q(X)$. Ne segue che il solo fattore irriducibile di $P_1(X)$ è X e che tutti i fattori irriducibili di $P_2(X)$ sono fattori di $Q(X)$; in particolare, $P_1(X)$ e $P_2(X)$ sono primi fra loro. Dunque $P_1(X) = X^a$ e $P_2(X) = Q(X)$. In particolare, $a = \dim \ker f^a = \dim V - \dim \ker Q(f)$. La tesi segue dall'osservazione che f_2 è iniettiva dato che 0 non è radice di $Q(X)$, e quindi $\ker Q(f) = f^a(V) = f^{a+1}(V) = \cdots = W$.

Compito **B**

1. (a) Un vettore direttore della retta è $(2, -1, 1)$ mentre i vettori ortogonali al piano (cioè alla sua giacitura) sono generati da $(-1, 3, 3)$. Poiché il loro prodotto scalare non è 0, la giacitura di r non può essere contenuta in quella di π, quindi r e π sono incidenti. Un'equazione cartesiana di S è $(x-2)^2 + (y-6)^2 + (z-5)^2 = 4$.

(b) Un'equazione parametrica per r è $(3, 0, 4) + (2, -1, 1)t$. Se $P(t)$ è un punto su r, basta imporre che il vettore $C - P(t)$ sia ortogonale al vettore direttore $(2, -1, 1)$. Ma allora si ottiene

$$\langle(-1-2t, 6+t, 1-t), (2, -1, 1)\rangle = -7 - 6t = 0;$$

il valore $t = -7/6$ porta quindi ad un'equazione parametrica per la retta cercata come $(2, 6, 5) + (8, 29, 13)t'$ e perciò ad equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 29x - 8y - 10 = 0 \\ 13x - 8z + 14 = 0. \end{cases}$$

Per la distanza, calcoliamo la distanza tra C e $P(7/6)$:

$$\|(4/3, 29/6, 13/6)\| = \frac{\sqrt{1074}}{6}.$$

Poiché essa è maggiore di 2, la retta è esterna alla sfera e la distanza cercata è $\frac{\sqrt{1074}}{6} - 2$.

(c) Nel fascio improprio di piani paralleli a π, $3y - x + 3z + d = 0$, basta scegliere i piani distanti da C quanto il raggio della sfera:

$$\frac{|-2+18+15+d|}{\sqrt{1+9+9}} = 2$$

per ottenere le due equazioni $y - x + 3z - 31 + 2\sqrt{19} = 0$, $y - x + 3z - 31 - 2\sqrt{19} = 0$.

2. (a) La matrice A_h dei coefficienti e il vettore B_h dei termini noti del sistema sono:

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 2h & -2 \\ h+5 & 3 & -h-2 \\ h+1 & 3h & -3 \end{pmatrix}, \quad B_h = \begin{pmatrix} 4 \\ h+5 \\ h^2+5 \end{pmatrix},$$

e $\det A_h = -2(h+3)(h+1)(h-1)$. Quindi per $h \neq 1, -1, -3$ il sistema ha soluzione unica.

Per $h = 1$, il rango di A_h è 2, ed è uguale al rango di A_h orlata con B_h, quindi il sistema è risolubile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione $3 - \operatorname{rank} A_h = 1$.

Per $h = -1$, il rango di A_h è 2, ed è uguale al rango di A_h orlata con B_h, quindi il sistema è risolubile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione $3 - \operatorname{rank} A_h = 1$.

Per $h = -3$, il rango di A_h è 2, mentre il rango della matrice orlata è 3, quindi il sistema non ha soluzioni.

(b) Per $h = 1$ lo spazio delle soluzioni ha equazioni:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

Per $h = -1$ lo spazio delle soluzioni ha equazioni:

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

(c)

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$. Siccome sono tutti distinti, la matrice è diagonalizzabile.

(d) Gli autospazi associati hanno equazioni:

$$V_1 = \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad V_2 = \begin{cases} x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \qquad V_3 = \begin{cases} 3x + 5y = 0 \\ 5y + 3z = 0 \end{cases}$$

3. Vedi soluzioni del compito A