

Corso di Algebra lineare - a.a. 2004-2005

Prova scritta del 27.6.2005

Compito A

1. Sia $Oxyz$ un riferimento ortonormale in uno spazio euclideo reale di dimensione 3. Siano dati i quattro punti Q, A, B, C rispettivamente di coordinate $(1, 1, 3), (2, 1, 0), (2, -1, 1)$ e $(0, 0, 0)$.
- (a) Determinare il raggio della sfera S di centro Q e passante per B e darne un'equazione cartesiana;
 - (b) dare equazioni parametriche e cartesiane per la retta contenente Q e B e scrivere un'equazione cartesiana per il piano π contenente A, B e C ;
 - (c) trovare la distanza di Q da π e le coordinate del punto P di π che ha distanza minima da Q ;
 - (d) trovare il raggio della circonferenza ottenuta intersecando S e π .

Punti (2+4+3+2)

2. Sia A una matrice 3×3 reale la cui prima riga è $(1, 1, 1)$. Supponiamo che i vettori ${}^t(1, 0, -1)$ e ${}^t(1, -1, 0)$ siano autovettori per A .
- (a) Qual'è il rango di A ?
 - (b) Mostrare che A è diagonalizzabile oppure nilpotente.
 - (c) Fare un esempio di una matrice di questa forma diagonalizzabile, e di una nilpotente.
 - (d) Supponiamo che un autospazio di A abbia equazioni:

$$y + x - 2z = y - x = 0.$$

Determinare i coefficienti di A .

Punti (3+3+2+3)

3. Sia A una matrice 2×2 reale.
- (a) Mostrare che, se $A^2 + I = 0$, allora A è simile a

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Si supponga che $A^3 + A = 0$, e che A non sia simile a B . Determinare A .
- (c) Si supponga che $A^4 + 2A^2 + I = 0$. Dire se A è simile a B o no.

Punti (3+3+2)

%%%

Ogni risposta va giustificata.

Su ogni foglio dell'elaborato vanno indicati nome e cognome dello studente. Sul primo foglio va indicato il corso di laurea (Matematica o Fisica), e se si tratta di laurea triennale o quadriennale.

Corso di Algebra lineare - a.a. 2004-2005

Prova scritta del 27.6.2005

Compito B

1. Sia $Oxyz$ un riferimento ortonormale in uno spazio euclideo reale di dimensione 3. Siano dati i quattro punti Q, A, B, C rispettivamente di coordinate $(2, 1, 3), (0, 0, 0), (1, -1, 1)$ e $(2, 2, 0)$.
- (a) Determinare il raggio della sfera S di centro Q e passante per B e darne un'equazione cartesiana;
 - (b) dare equazioni parametriche e cartesiane per la retta contenente Q e B e scrivere un'equazione cartesiana per il piano π contenente A, B e C ;
 - (c) trovare la distanza di Q da π e le coordinate del punto P di π che ha distanza minima da Q ;
 - (d) trovare il raggio della circonferenza ottenuta intersecando S e π .

Punti (2+4+3+2)

2. Sia A una matrice 3×3 reale della forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Supponiamo che il sottospazio W di equazione $x + y = 0$ sia un autospazio di A .

- (a) Qual'è il rango di A ?
- (b) Mostrare che A è diagonalizzabile oppure nilpotente.
- (c) Fare un esempio di una matrice di questa forma diagonalizzabile, e di una nilpotente.
- (d) Supponendo che ${}^t(1, 1, 0)$ sia un autovettore per A , determinare a, b, c, d, e ed f .

Punti (3+3+2+3)

3. Sia A una matrice 2×2 reale.

- (a) Mostrare che, se $A^2 + I = 0$, allora A è simile a

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Si supponga che $A^3 + A = 0$, e che A non sia simile a C . Determinare A .
- (c) Si supponga che $A^4 + 2A^2 + I = 0$. Dire se A è simile a C o no.

Punti (3+3+2)

%%%

Ogni risposta va giustificata.

Su ogni foglio dell'elaborato vanno indicati nome e cognome dello studente. Sul primo foglio va indicato il corso di laurea (Matematica o Fisica), e se si tratta di laurea triennale o quadriennale.