Corso di Algebra lineare - a.a. 2004-2005

Prova scritta del 21.2.2005

Compito **A**

1. Sia $Oxyz$ un riferimento ortonormale in uno spazio euclideo reale di dimensione 3. Sia C il punto di coordinate $(1, 0, 1)$, r la retta di equazioni
$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ 3z + y = 3 \end{cases}$$
ed s la retta passante per il punto di coordinate $(7, -1, 0)$ e con giacitura generata dal vettore ${}^t(2, 1, -1)$.
   (a) Scrivere un'equazione della sfera S di centro C e raggio 3 e dare equazioni parametriche per r;
   (b) verificare che r ed s hanno giaciture ortogonali, determinare (se esiste) il punto $s \cap r$, mostrare che $C \in r$ e così determinare la posizione relativa di s ed S;
   (c) scrivere equazioni cartesiane per s e per i due piani contenenti s e tangenti ad S;
   (d) dare equazioni cartesiane per tutti i piani paralleli a s e tangenti a S.

   Punti (3+4+2+2)

2. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 reali. Siano
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$
$\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri l'applicazione $f_\alpha : V \to V$, dipendente dal parametro reale α, definita così:
$$f_\alpha(X) = AX\,{}^tB \qquad \forall X \in V.$$
   (a) verificare che f_α è un'applicazione lineare e scrivere la matrice associata rispetto alla base standard di V: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
   (b) Per quali valori di α l'applicazione f_α è diagonalizzabile? Per quali valori di α l'applicazione f_α^2 è diagonalizzabile?
   (c) Scrivere una base di V che diagonalizza f_α per $\alpha = -3$.

   Punti (4+4+3)

3. Siano A e B matrici complesse $n \times n$ tali che $AB = -BA$.
   (a) Mostrare che, se X è un autovettore di A e $BX \neq 0$, allora BX è un autovettore di A.
   (b) Supponiamo A e B invertibili e A diagonalizzabile. Mostrare che n è pari.
   (c) Mostrare che la conclusione di (b) non è necessariamente vera se non si suppone A invertibile; dare un controesempio in cui B è invertibile e il rango di A è $n-1$ (e $n > 1$).
   (d) Mostrare che la conclusione di (b) vale anche se non si suppone che A sia diagonalizzabile, ma solo che A e B siano invertibili.

   Punti (2+2+2+2)

%%

Ogni risposta va giustificata.

Su ogni foglio dell'elaborato vanno indicati nome e cognome dello studente. Sul primo foglio va indicato il corso di laurea (Matematica o Fisica), e se si tratta di laurea triennale o quadriennale.

Corso di Algebra lineare - a.a. 2004-2005

Prova scritta del 21.2.2005

Compito **B**

1. Sia $Oxyz$ un riferimento ortonormale in uno spazio euclideo reale di dimensione 3. Sia C il punto di coordinate $(0,1,1)$, r la retta di equazioni

$$\begin{cases} 3x+y=1 \\ 2x+z=1 \end{cases}$$

ed s la retta passante per il punto di coordinate $(0,3,5)$ e con giacitura generata dal vettore ${}^t(1,-1,2)$.

   (a) Scrivere un'equazione della sfera S di centro C e raggio 2 e dare equazioni parametriche per r;

   (b) verificare che r ed s hanno giaciture ortogonali, determinare (se esiste) il punto $s \cap r$, mostrare che $C \in r$ e così determinare la posizione relativa di s ed S;

   (c) scrivere equazioni cartesiane per s e per i due piani contenenti s e tangenti ad S;

   (d) dare equazioni cartesiane per tutti i piani paralleli a s e tangenti a S.

   Punti (3+4+2+2)

2. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 reali. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri l'applicazione $f_\alpha : V \to V$ definita così:

$$f_\alpha(X) = AXB \qquad \forall X \in V.$$

   (a) verificare che f_α è un'applicazione lineare e scrivere la matrice associata rispetto alla base standard di V: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

   (b) Per quali valori di α l'applicazione f_α non è suriettiva? Scrivere una base per l'immagine di f_α al variare di α.

   (c) Per quali valori di α l'applicazione f_α è diagonalizzabile?

   Punti (4+3+4)

3. Siano A e B matrici complesse $n \times n$ tali che $AB = -BA$.

   (a) Mostrare che, se X è un autovettore di A e $BX \neq 0$, allora BX è un autovettore di A.

   (b) Supponiamo A e B invertibili e A diagonalizzabile. Mostrare che n è pari.

   (c) Mostrare che la conclusione di (b) non è necessariamente vera se non si suppone A invertibile; dare un controesempio in cui B è invertibile e il rango di A è $n-1$ (e $n > 1$).

   (d) Mostrare che la conclusione di (b) vale anche se non si suppone che A sia diagonalizzabile, ma solo che A e B siano invertibili.

   Punti (2+2+2+2)

%%

Ogni risposta va giustificata.

Su ogni foglio dell'elaborato vanno indicati nome e cognome dello studente. Sul primo foglio va indicato il corso di laurea (Matematica o Fisica), e se si tratta di laurea triennale o quadriennale.