Corso di Algebra lineare - a.a. 2004-2005
Prova scritta del 21.2.2005 – soluzioni

Compito **A**

1. Per comodità grafica tutti i vettori e i punti sono scritti come vettori riga.

   (a) Un'equazione di S è $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=9$. Un punto di r è ad esempio $(0,3/2,1/2)$ e la sua giacitura è generata ad esempio dal vettore $(2,-3,1)$; perciò un'equazione parametrica per r è $(0,3/2,1/2)+(2,-3,1)t$.

   (b) Evidentemente $\langle(2,3,-1),(2,1,-1)\rangle=0$. Sostituendo l'equazione parametrica di s, $(7,-1,0)+(2,1,-1)t'$, in quelle cartesiane di r si ottengono le coordinate dell'intersezione (per $t'=-2$), $(3,-3,2)$. Il punto C verifica le equazioni di r, perciò le appartiene. Ma allora r è la retta di minima distanza tra s e C e $d(s,C)=d(s\cap r,C)=\sqrt{14}$.

   (c) Troviamo equazioni cartesiane per s: ad esempio,
$$\begin{cases}2y-x=-9\\2z+x=7\end{cases}.$$
   Ora nel fascio proprio dei piani per s $\lambda(2y-x+9)+\mu(2z+x-7)=0$ cerchiamo quelli che hanno distanza da C pari a 3. Poiché il piano $2z+x-7=0$ non ha distanza 3, possiamo scegliere $\lambda=1$ e otteniamo che i due valori corretti di μ soddisfano l'equazione
$$29\mu^2+46\mu-19=0$$
   da cui $\mu=\frac{23\pm\sqrt{1080}}{29}$.

   (d) I piani paralleli a s hanno vettore normale ortogonale alla giacitura di s e perciò del tipo $(\lambda,\mu,2\lambda+\mu)$. Nel fascio improprio di piani paralleli con questo vettore direttore,
$$\lambda x+\mu y+(2\lambda+\mu)z-d=0$$
   basta imporre che la distanza da C sia 3:
$$\frac{|3\lambda+\mu-d|}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+(2\lambda+\mu)^2}}=3$$
   da cui $d=3\lambda+\mu\pm3\sqrt{5\lambda^2+4\lambda\mu+2\mu^2}$.

2. (a) $\forall X,Y\in V\quad f_\alpha(X+Y)=A(X+Y)\,{}^tB=AX\,{}^tB+AY\,{}^tB=f_\alpha(X)+f_\alpha(Y)$, e $\forall X\in V,k\in\mathbb{R}\quad f_\alpha(kX)=A(kX)\,{}^tB=k(AX\,{}^tB)=kf_\alpha(X)$, dunque f_α è lineare. Se $X=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$,
$$f_\alpha(X)=\begin{pmatrix}-3x_1-3\alpha x_2 & -3x_1+3x_2\\ x_3-\alpha x_4 & x_3-x_4\end{pmatrix}$$
   dunque la matrice associata ad f_α rispetto alla base standard è la seguente matrice a blocchi:
$$M=\begin{pmatrix}-3&3\alpha&0&0\\-3&3&0&0\\0&0&1&-\alpha\\0&0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3B&\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\\\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}&-B\end{pmatrix}$$

   (b) Cerchiamo i valori di α per cui f_α è diagonalizzabile, cioè per cui la matrice M associata ad f_α è diagonalizzabile. M è diagonalizzabile se e solo se lo sono i suoi blocchi, dunque se e solo se lo è B. Consideriamo il polinomio caratteristico di B: $p_B(\lambda)=\lambda^2-1+\alpha$. Dunque p_B ha radici reali se e solo se $\alpha\le1$. Se $\alpha=1$, allora B ha come unico autovalore 0, ma
$$B=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$
   non è la matrice nulla, dunque B non è diagonalizzabile. Per $\alpha<1$, B ha due autovalori distinti $(\pm\sqrt{1-\alpha})$, quindi è diagonalizzabile.

   La matrice associata a f_α^2 rispetto alla base standard è M^2. Poichè $B^2=\begin{pmatrix}1-\alpha&0\\0&1-\alpha\end{pmatrix}$, M^2 è già diagonale per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$.

(c) Per $\alpha = -3$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Una base di autovettori per B è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Dunque una base diagonalizzante per M è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. (a) Supponiamo che $AX = \lambda X$, dove λ è uno scalare. Allora $A(BX) = -BAX = -B\lambda X = -\lambda BX$.

(b) Dato che 0 non è un autovalore di A, il punto (a) mostra che gli autovalori di A sono distribuiti in coppie di scalari opposti. Per ogni scalare λ indichiamo con V_λ il corrispondente autospazio. Il punto (a) mostra che $BV_\lambda \subset V_{-\lambda}$ per ogni λ. Rimpiazzando λ con $-\lambda$, si ottiene che $BV_{-\lambda} \subset V_\lambda$. Poiché B è invertibile, segue che V_λ e $V_{-\lambda}$ hanno la stessa dimensione. Dunque $\mathbb{C}^n$ è somma diretta di sottospazi della forma $V_\lambda \oplus V_{-\lambda}$, ognuno dei quali ha dimensione pari. Quindi anche n è pari.

(c) Poniamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si verifica immediatamente che $AB = -BA$.

(d) Indichiamo con $P(X)$ il polinomio caratteristico di A. Moltiplicando $AB = -BA$ a destra per B^{-1} si ottiene che $A = -BAB^{-1}$, e quindi che A è simile a $-A$. Allora

$$P(X) = \det(XI - A) = \det(XI + A) = (-1)^n \det(-XI - A) = (-1)^n P(-X).$$

Se n è dispari ciò significa che i coefficienti dei termini di grado pari di $P(X)$ sono nulli. In particolare, il termine noto, cioè il determinante di A, è nullo, e quindi A non è invertibile.

Compito **B**

1. Per comodità grafica tutti i vettori e i punti sono scritti come vettori riga.

(a) Un'equazione di S è $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$. Un punto di r è ad esempio $(1/3, 0, 1/3)$ e la sua giacitura è generata ad esempio dal vettore $(-1, 3, 2)$; perciò un'equazione parametrica per r è $(1/3, 0, 1/3) + (-1, 3, 2)t$.

(b) Evidentemente $\langle(-1, 3, 2), (1, -1, 2)\rangle = 0$. Sostituendo l'equazione parametrica di s, $(0, 3, 5) + (1, -1, 2)t'$, in quelle cartesiane di r si ottengono le coordinate dell'intersezione (per $t' = -1$), $(-1, 4, 3)$. Il punto C verifica le equazioni di r, perciò le appartiene. Ma allora r è la retta di minima distanza tra s e C e $d(s, C) = d(s \cap r, C) = \sqrt{14}$.

(c) Troviamo equazioni cartesiane per s: ad esempio,

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2y + z = 11 \end{cases}.$$

Ora nel fascio proprio dei piani per s $\lambda(x + y - 3) + \mu(2y + z - 11) = 0$ cerchiamo quelli che hanno distanza da C pari a 2. Poiché il piano $2y + z - 11 = 0$ non ha distanza 2, possiamo scegliere $\lambda = 1$ e otteniamo che i due valori corretti di μ soddisfano l'equazione

$$11\mu^2 + 4\mu - 1 = 0$$

da cui $\mu = \frac{-2 \pm \sqrt{15}}{11}$.

(d) I piani paralleli a s hanno vettore normale ortogonale alla giacitura di s e perciò del tipo $(\lambda - 2\mu, \lambda, \mu)$. Nel fascio improprio di piani paralleli con questo vettore direttore,

$$(\lambda - 2\mu)x + \lambda y + \mu z - d = 0$$

basta imporre che la distanza da C sia 2:

$$\frac{|\lambda + \mu - d|}{\sqrt{(\lambda - 2\mu)^2 + \lambda^2 + \mu^2}} = 2$$

da cui $d = \lambda + \mu \pm 2\sqrt{2\lambda^2 - 4\lambda\mu + 5\mu^2}$.

2. (a) $\forall X, Y \in V \quad f_\alpha(X+Y) = A(X+Y)B = AXB + AYB = f_\alpha(X) + f_\alpha(Y)$, e $\forall X \in V, k \in \mathbb{R} \quad f_\alpha(kX) = A(kX)B = k(AXB) = kf_\alpha(X)$, dunque f_α è lineare. Se $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$,

$$f_\alpha(X) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 4x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 3\alpha x_3 & 2x_1 + x_2 + 2\alpha x_3 + \alpha x_4 \end{pmatrix}$$

dunque la matrice associata ad f_α rispetto alla base standard è

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3\alpha & 0 \\ 2 & 1 & 2\alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

(b) f non è suriettiva se e solo se $\det M = 0$: $\det M = 36\alpha^2$, che è nullo se e solo se $\alpha = 0$. In questo caso l'immagine di f_0 è generata da $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e da $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per $\alpha \neq 0$, $\operatorname{Im} f_\alpha = V$, quindi come base si può prendere quella standard.

(c) Il polinomio caratteristico di M è $P(\lambda) = (\lambda - 6)(\lambda - 2)(\lambda - 3\alpha)(\lambda - \alpha)$ (dunque ha sempre radici reali). Per $\alpha \neq 6, 2, 2/3, 0$, le radici di P, dunque gli autovalori di M, sono tutti distinti, quindi f_α è diagonalizzabile.

Per $\alpha = 0$, gli autovalori sono 6, 2 e 0 (con molteplicità 2). Dato che il rango di f_0 è 2, anche la molteplicità geometrica dell'autovalore 0, cioè la dimensione del nucleo di f_α, vale 0.

Per $\alpha = 2$, consideriamo l'autospazio V_6 associato all'autovalore 6: esso è dato dalle equazioni (sempre rispetto alla base standard)

$$x_1 - x_2 = x_1 - 2x_3 = x_1 - 2x_4 = 0,$$

dunque ha dimensione 1. Quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore 6 è 1, mentre quella algebrica è 2. Se ne conclude che in questo caso M (dunque f_α) non è diagonalizzabile.

Per $\alpha = 2/3$, gli autovalori sono 6, 2/3 e 2 (con molteplicità 2). L'autospazio V_2 è definito, rispetto alla base standard, dalle equazioni

$$x_1 = 0 = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4x_4,$$

e dunque ha dimensione 2. Ne segue che in questo caso M (e dunque f_α) è diagonalizzabile.

Infine, per $\alpha = 6$, gli autovalori sono 2, 18 e 6 (con molteplicità 2). La matrice $M - 6I$ ha rango 2, e quindi l'autovalore 6 ha molteplicità geometrica uguale a 2. Ne segue che M (e quindi f_α) è diagonalizzabile.

3. Vedi soluzioni del compito A.