Corso di Algebra Lineare - a.a. 2013-2014

Prova scritta del 25.9.2014

1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Sono dati i punti P_1, P_2 e C di coordinate rispettivamente $(1,1,2)$, $(1,2,3)$ e $(-1,3,1)$, il piano π di equazione $x+y-2z-1=0$ e i due vettori $v={}^t(2,2,-1)$ e $w={}^t(0,2,1)$.

   (a) Scrivere equazioni cartesiane per la sfera S di centro C e passante per P_1, per la retta r_v passante per P_2 e con giacitura generata da v e per la retta r_w passante per P_2 e con giacitura generata da w.

   (b) Determinare le posizioni relative di π e S e di r_w e S.

   (c) Determinare, se esiste, una sfera tangente contemporaneamente alle due rette r_v e r_w e al piano π.

   (Punti 3+3+3)

2. (a) Discutere il sistema

$$\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 4x+(2t-2)y+(3-2t)z=t \end{cases}$$

   al variare del parametro reale t.

   (b) Un sistema lineare ha la forma $Ax=b$, dove A è una matrice reale 4×4 in cui le prime tre colonne sono linearmente indipendenti e $b\neq 0$. Per ciascuna delle tre possibilità: i) il sistema ha infinite soluzioni, ii) il sistema ha una sola soluzione e iii) il sistema non ha soluzione, dare un esempio di A e b che la realizzano o dimostrare che un tale esempio non esiste.

   (Punti 3+3)

3. Sia V lo spazio vettoriale (complesso) dei polinomi di grado ≤ 3 a coefficienti complessi. Siano h e k numeri complessi. Definiamo applicazioni $D: V\to V$ e $T: V\to V$ ponendo

$$Df(x)=f'(x)\,, \qquad Tf(x)=f(x+k)$$

   per ogni $f\in V$.

   (a) Mostrare che D e T sono lineari.

   (b) Trovare il rango di $hD+T$ al variare di h e k.

   (c) Trovare gli autovalori e le dimensioni degli autospazi di $hD+T$ al variare di h e k.

   (d) Dire per quali valori di h e k l'applicazione lineare $hD+T$ è diagonalizzabile.

   (Punti 2+2+2+2)

4. Sia $\phi(x_1,x_2,x_3,x_4)$ la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ definita da

$$\phi(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_3+x_2^2+2x_2x_4+x_3^2$$

   (a) Trovare la matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ della forma bilineare simmetrica associata a ϕ.

   (b) Trovare una base di $\mathbb{R}^4$ che sia ortogonale per ϕ.

   (c) Calcolare rango e segnatura di ϕ.

   (d) Sia ψ una forma bilineare simmetrica non degenere su uno spazio vettoriale reale V. Sia (a,b) la segnatura di ψ. Mostrare che esiste un sottospazio vettoriale W di V di dimensione $\min(a,b)$ tale che $\psi(w,w')=0$ per ogni scelta di $w,w'\in W$.

   (Punti 2+3+2+2)

Soluzioni

1. (a) Il raggio di S, cioè la distanza tra i punti C e P_1, è pari a

$$\sqrt{(-1-1)^2+(3-1)^2+(1-2)^2}=3;$$

perciò un'equazione della sfera S è

$$(x+1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9.$$

Equazioni per r_v sono ad esempio

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ x+2z=7 \end{cases};$$

equazioni per r_w sono ad esempio

$$\begin{cases} x=1 \\ y-2z=-4 \end{cases}.$$

(b) La distanza tra il punto C e il piano π è

$$\frac{|-1+3-2-1|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{\sqrt{6}}{6}<3$$

perciò il piano è secante rispetto a S; i punti di r_w possono essere rappresentati come $(1, 2+2t, 3+t)$, quindi nei punti di eventuale intersezione tra r_w ed S il parametro t dovrebbe risolvere l'equazione

$$(1+1)^2+(2+2t-3)^2+(3+t-1)^2=9,$$

che equivale a

$$5t^2=0,$$

che ammette solo una soluzione ($t=0$): quindi la retta è tangente alla sfera.

(c) La risposta è affermativa; anzi, esistono sempre infinite sfere con le caratteristiche indicate. Per dimostrarlo, consideriamo il piano π' che contiene le rette r_v e r_w, e chiamiamo s la retta ortogonale a π' e passante per il punto P_2; nel piano π' i punti equidistanti da r_v e r_w sono contenuti a loro volta nell'unione di due rette, le due bisettrici b_1 e b_2 degli angoli formati da r_v e r_w. A questo punto, i punti del piano contenente s e b_1 e i punti del piano contenente s e b_2 sono tutti equidistanti da r_v e r_w.

Perciò ad esempio per ogni retta passante per P_2 e contenuta in uno di questi due piani basterà trovare i punti nei quali la distanza comune da r_v e r_w è anche pari a quella dal piano π; poiché tutte queste rette tranne al più due intersecano π, all'interno del segmento tra P_2 e questo punto di intersezione deve necessariamente esistere un punto che soddisfa le richieste.

Ad esempio, se consideriamo i punti della retta s, che si possono esprimere come $(1+2t', 2-t', 3+2t')$ e poiché il piano π' ha equazione $2x-y+2z-6=0$, dobbiamo imporre che

$$\frac{|2+4t'-2+t'+6+4t'-6|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{|1+2t'+2-t'-6-4t'-1|}{\sqrt{1+1+4}},$$

cioè $|3t'|=\frac{|-3t'-6|}{\sqrt{6}}$, che ha tra le soluzioni $\bar{t}'=\frac{2\sqrt{6}+2}{5}$. Percio' la sfera di centro $(1+2\bar{t}', 2-\bar{t}', 3+2\bar{t}')$ e raggio $3\bar{t}'$ soddisfa le ipotesi.

2. (a) Tramite eliminazione di Gauss il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ (2t-4)y + (1-2t)z = t \end{cases}$$

da cui è immediato determinare il rango della matrice dei coefficienti, che è sempre 2, in quanto per nessun valore di t si annullano contemporaneamente i due coefficienti $2t-4$ e $1-2t$. Di conseguenza anche la matrice completa ha sempre rango 2 per ogni valore di t, visto che 2 è il massimo possibile e il suo rango non può essere inferiore a quello della matrice dei coefficienti; il sistema è quindi sempre compatibile e le soluzioni dipendono sempre da 1 solo parametro lineare.

(b) Se le prime tre colonne della matrice A sono linearmente indipendenti il rango di A può essere solo 3 o 4; il numero di eventuali soluzioni dipenderà quindi dal fatto che b sia o meno combinazione lineare delle colonne di A. Precisamente:

i) perché il sistema abbia infinite soluzioni dovremo avere che $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$, come ad esempio se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

ii) perché il sistema abbia una e una sola soluzione dovremo avere che $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 4$, come ad esempio se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

iii) perché il sistema non abbia soluzione dovremo avere che $\text{rango}(A) = 3, \text{rango}(A^*) = 4$, come ad esempio se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. (a) La derivazione è lineare.

$$T(af+bg)(x) = (af+bg)(x+k) = af(x+k)+bg(x+k) = aTf(x)+bTg(x) = (aTf+bTg)(x)$$

(b) La matrice di $hD+T$ rispetto alla base standard $1, x, x^2, x^3$ di V è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h+k & k^2 & k^3 \\ 0 & 1 & 2h+2k & 3k^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3h+3k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi il rango di $hD+T$ è 4 per ogni valore di h e k.

(c) Dato che la matrice A è triangolare superiore con 1 in ogni posto della diagonale, il solo autovalore di $hD+T$ è 1 e ha molteplicità 4. Il rango di $I-A$ è 0 se $h=k=0$, 2 se $h=-k\neq 0$, e 3 altrimenti. Dunque l'autospazio di 1 ha dimensione 4 per $h=k=0$, dimensione 2 per $h=-k\neq 0$, e dimensione 1 altrimenti.

(d) Segue dal punto precedente che $hD+T$ è diagonalizzabile se e solo se $h=k=0$.

4. (a)

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) ${}^te_2Qe_2 = {}^te_3Qe_3 = 1$ e ${}^te_2Qe_3 = 0$. Se $v = {}^t(x, y, z, w)$, le condizioni di ortogonalità tra v ed e_2, e_3 sono, rispettivamente,

$$w = -y \quad \text{e} \quad z = -x$$

Quindi i vettori $v_3 = {}^t(1, 0, -1, 0)$ e $v_4 = {}^t(0, 1, 0, -1)$ sono ortogonali a e_2 e e_3. Si verifica poi immediatamente che sono ortogonali tra loro, cioè che ${}^tv_3Qv_4 = 0$, e inoltre che ${}^tv_3Qv_3 = {}^tv_4Qv_4 = -1$. Quindi se poniamo $v_1 = e_2$, $v_2 = e_3$, allora v_1, v_2, v_3, v_4 è una base ortogonale rispetto alla forma quadratica ϕ.

(c) Dato che per la base ortonormale v_1, v_2, v_3, v_4 si ha che $\phi(v_1) = \phi(v_2) = 1$, $\phi(v_3) = \phi(v_4) = -1$, la segnatura di ϕ è $(2, 2)$ e il rango è 4.

(d) Sia $v_1, \ldots, v_a, v_{a+1}, \ldots, v_{a+b}$ una base ortogonale di V tale che $\psi(v_i, v_i) = 1$ se $i \leq a$ e $\psi(v_i, v_i) = -1$ se $i > a$. I vettori $w_i = v_i + v_{a+i}$, con $i = 1, \ldots, \min(a, b)$, sono indipendenti. Inoltre

$$\psi(w_i, w_j) = \psi(v_i, v_j) + \psi(v_{a+i}, v_{a+j}) = \delta_{ij} - \delta_{ij} = 0$$

per ogni $i, j \leq a$. Un sottospazio W con le caratteristiche richieste è quello generato da $w_1, \ldots, w_{\min(a,b)}$.