Corso di Algebra Lineare - a.a. 2013-2014

Prova scritta del 20.2.2014 – testo B

1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Sono dati i punti C di coordinate $(-1,1,0)$, P di coordinate $(1,3,1)$, Q di coordinate $(1,3,4)$, R di coordinate $(1,1,2)$ e T di coordinate $(1,2,4)$, nonché il vettore $v = {}^t(1,2,-1)$. Sia r la retta passante per R la cui giacitura è generata dal vettore v.

   (a) Scrivere equazioni cartesiane per la sfera S di centro C passante per P e per il piano π passante per Q e contenente la retta r.

   (b) Determinare la posizione relativa di r e S. I punti P, Q e T sono allineati?

   (c) Scrivere la condizione per cui una retta passante per Q e la cui giacitura sia generata da un generico vettore ${}^t(a,b,c)$ sia tangente alla sfera S e dedurne un'equazione del cono tangente a S da Q (che è l'unione di tutte le rette tangenti a S passanti per Q, se ne esistono).

   (Punti 3+3+2)

2. Siano V e W due spazi vettoriali reali di dimensioni rispettivamente 4 e 3, $\mathcal{B}$ una base di V, $\mathcal{C}$ una base di W e $f : V \to W$ un'applicazione lineare la cui matrice associata nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ risulta essere
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) f è suriettiva?

   (b) Sia Z un sottospazio di V di dimensione 3 che contiene in particolare i vettori v_1, v_2 e v_3 di coordinate rispettivamente ${}^t(0,4,1,-1)$, ${}^t(-2,-1,1,0)$ e ${}^t(2,5,0,-1)$. Determinare la dimensione dello spazio generato da v_1, v_2 e v_3 e, se possibile, la dimensione di $(\ker f) \cap Z$.

   (Punti 3+2)

3. Consideriamo i seguenti elementi di $\mathbb{C}^3$:
$$v_1 = {}^t(1,0,-1) \qquad v_2 = {}^t(1,0,1) \qquad v_3 = {}^t(0,1,-1)$$

   (a) Mostrare che esiste una e una sola applicazione lineare $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che:
$$f(v_1) = {}^t(0,-1,1) \quad f(v_2) = {}^t(-2-2i,1,1) \quad f(v_3) = {}^t(i,-1-i,1)$$

   (b) Trovare la matrice di f rispetto alla base canonica (sia nel dominio che nel codominio).

   (c) Trovare autovalori, autovettori e polinomio caratteristico di f.

   (d) Decidere se f è diagonalizzabile.

   (Punti 1+3+3+2)

4. Sia ϕ la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^4$ definita da $\phi(v,w) = {}^t v Q w$, dove
$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Trovare una base di $\mathbb{R}^4$ che sia ortogonale per ϕ.

   (b) Calcolare rango e segnatura di ϕ.

   (c) Sia A una matrice reale simmetrica. Mostrare che A^3 e A^4 hanno lo stesso rango di A, che A^3 ha la stessa segnatura di A e che A^4 è semidefinita positiva.

   (Punti 3+3+2)

Soluzioni

1. (a) Poiché P deve appartenere a S e $d(C,P) = \sqrt{(-1-1)^2+(1-3)^2+(0-1)^2} = 3$, l'equazione della sfera S è

$$(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=9;$$

poiché poi la giacitura del piano π deve contenere, oltre a v, anche il vettore $Q-R = {}^t(0,2,2)$, deve appartenere al fascio improprio di piani di equazione $3x-y+z+\lambda=0$; imponendo il passaggio per Q (o per R) si ottiene che $\lambda=-4$, e perciò un'equazione per π è appunto

$$3x-y+z=-4.$$

(b) La retta r ammette come equazione parametrica $(1,1,2)+t\,{}^t(1,2,-1)$, cioè i suoi punti sono del tipo $(1+t,1+2t,2-t)$. Sostituendo queste espressioni nell'equazione della sfera S si trova un'equazione di secondo grado per t, $6t^2-1=0$, che ammette due soluzioni: perciò r e S sono secanti. Quanto ai punti P,Q e T, perché siano allineati dovrebbe verificarsi (poiché T e P sono distinti) che il vettore differenza $Q-P$ sia un multiplo di $T-P$; ma il primo risulta essere ${}^t(0,0,3)$, mentre il secondo ${}^t(0,-1,3)$, che sono linearmente indipendenti.

(c) la condizione di tangenza di una retta espressa in forma parametrica come $(1,3,4)+t\,{}^t(a,b,c)$ può scriversi come l'annullarsi del discriminante dell'equazione di secondo grado ottenuta sostituendo la parametrizzazione dei punti della retta nell'equazione della sfera S (come nella parte b)). Tale condizione risulta pertanto

$$(2a+2b+4c)^2-15(a^2+b^2+c^2) = -11a^2-11b^2+c^2+8ab+16ac+16bc=0.$$

Moltiplicando questa equazione per t^2 e ricordando che $x=1+at, y=3+bt$ e $z=4+ct$ si ottiene l'equazione cercata per il cono tangente:

$$-11(x-1)^2-11(y-3)^2+(z-4)^2+8(x-1)(y-3)+16(x-1)(z-4)+16(y-3)(z-4)=0.$$

2. (a) f è suriettiva se e solo se la sua matrice associata ha rango pari alla dimensione dello spazio di arrivo W, cioè 3. Ma è facile vedere che A ha rango 2; perciò f non è suriettiva.

(b) Chiamiamo U lo spazio generato dai v_i; poiché $v_1=v_2+v_3$, mentre v_2 e v_3 non sono uno multiplo dell'altro (o, equivalentemente, poiché il rango della matrice di cui i v_i sono righe, o colonne, calcolato ad esempio con l'eliminazione di Gauss, è 2), la dimensione di U risulta essere 2.

La dimensione di $\ker f$, d'altra parte, è a sua volta 2, per la formula sulla dimensione del nucleo e dell'immagine di f e il risultato del punto a) sul rango di A; e $\dim(\ker f \cap U)=1$, come si verifica ad esempio osservando che v_1 appartiene a $\ker f$, mentre v_2 no.

A questo punto, poiché lo spazio in cui si trovano Z e $\ker f$, V, ha dimensione 4, i valori possibili per $\dim(\ker f\cap Z)$ sono solamente 1 o 2 (un sottospazio di dimensione 3 e uno di dimensione 2 non possono avere in comune solo il vettore nullo in V); ed entrambi sono possibili, perché Z potrebbe ad esempio essere $\ker f+U$ (e in questo caso chiaramente $\dim(\ker f\cap Z)=2$ o, chiamato z un vettore di $V\setminus(\ker f+U)$, Z potrebbe essere generato da v_2,v_3 e z (nel qual caso $\dim(\ker f\cap Z)=1$). Perciò non è possibile determinare $\dim(\ker f\cap Z)$ in questa situazione.

3. (a) v_1,v_2,v_3 è una base di $\mathbb{C}^3$. Quindi dati comunque elementi w_1,w_2,w_3 di $\mathbb{C}^3$ esiste una e una sola applicazione lineare f tale che $f(v_i)=w_i$ per ogni i.

(b) Se indichiamo con e_1, e_2, e_3 la base standard di $\mathbb{C}^3$ si ha che $v_1 = e_1 - e_3$, $v_2 = e_1 + e_3$ e $v_3 = e_2 - e_3$. Quindi $2e_1 = v_1 + v_2$, $2e_2 = 2v_3 + v_2 - v_1$ e $2e_3 = v_2 - v_1$. Ne segue che

$$f(e_1) = \frac{1}{2}(f(v_1) + f(v_2)) = \begin{pmatrix} -1-i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = v_3 + \frac{1}{2}(f(v_2) - f(v_1)) = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = \frac{1}{2}(f(v_2) - f(v_1)) = \begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice cercata è

$$\begin{pmatrix} -1-i & -1 & -1-i \\ 0 & -i & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Il polinomio caratteristico è $P(X) = X^3 + (2i+1)X^2 + (2i-1)X - 1 = (X+1)(X+i)^2$. Quindi f ha gli autovalori $-i$, con molteplicità 2, e -1, con molteplicità 1. L'equazione per gli autovettori relativi a $-i$ è

$$\begin{pmatrix} -1-i & -1 & -1-i \\ 0 & -i & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

che ha come sole soluzioni quelle della forma ${}^t(a, -a, 0)$, dove $a \in \mathbb{C}$. In particolare l'autospazio in questione ha dimensione 1. L'equazione per gli autovettori relativi a -1 è

$$\begin{pmatrix} -1-i & -1 & -1-i \\ 0 & -i & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

che ha come sole soluzioni quelle della forma ${}^t(a, ia, -(1+i)a)$, dove $a \in \mathbb{C}$.

(d) f non è diagonalizzabile perché l'autovalore $-i$ ha molteplicità 2 ma il corrispondente autospazio ha dimensione 1.

4. (a) I vettori v tali che $Qv = 0$ sono tutti e soli quelli della forma ${}^t(a, 0, 0, -a)$. Poniamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Poniamo

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e notiamo che $\phi(v_2, v_2) = 2$. I vettori ortogonali a v_2 sono tutti e soli quelli della forma ${}^t(x, y, z, -x - y - 2z)$. Tra questi scegliamo ad esempio

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e notiamo che $\phi(v_3, v_3) = -2$. I vettori ortogonali sia a v_2 che a v_3 sono tutti e soli quelli della forma ${}^t(x, y, -y, -x + y)$. Tra questi scegliamo ad esempio

$$v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e notiamo che $\phi(v_4, v_4) = -2$. Quindi rispetto alla base v_1, v_2, v_3, v_4 la matrice di ϕ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) Segue dal punto precedente che il rango è 3 e la segnatura $1 - 2 = -1$.

(c) Per il teorema spettrale esistono una matrice ortogonale U e una matrice diagonale

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & \dots \\ & & \dots & & \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

tali che $A = U^{-1}\Lambda U$. Il rango di A è uguale a quello di Λ, che è il numero di termini diagonali non nulli. La segnatura di A è uguale a quella di Λ, che è la differenza tra il numero di termini diagonali positivi e quello dei termini diagonali negativi. Quindi

$$A^3 = U^{-1}\Lambda^3 U = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & 0 & & \dots \\ & & \dots & & \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_n^3 \end{pmatrix}$$

Ora λ_i^3 è positivo o negativo se e solo se lo è λ_i. Ne segue che rango e segnatura di A^3 sono uguali a quelli di A. Analogamente

$$A^4 = U^{-1}\Lambda^4 U = \begin{pmatrix} \lambda_1^4 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^4 & 0 & & \dots \\ & & \dots & & \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_n^4 \end{pmatrix}$$

Dato che $\lambda_i^4 \geq 0$ e $\lambda_i^4 = 0$ se e solo se $\lambda_i = 0$ se ne deduce che A^4 è semidefinita positiva e ha lo stesso rango di A.