Corso di Algebra Lineare - a.a. 2013-2014

Prova scritta del 16.6.2014

1. Sia $Oxyz$ un sistema di riferimento ortonormale in uno spazio euclideo di dimensione 3. Sono dati i punti P, Q e C di coordinate rispettivamente $(1, 1, 0)$, $(-2, 1, 3)$ e $(2, -1, 2)$ e il piano π di equazione $x - y - 2z + 1 = 0$.

   (a) Scrivere equazioni cartesiane per la sfera S di centro C passante per P e per la retta r perpendicolare a π e passante per Q, e trovare due vettori che generino la giacitura del piano π.

   (b) Determinare la posizione relativa di π e S e quella di r e S.

   (c) Esistono piani la cui distanza da S è uguale a quella da r? Se esistono, determinare tra questi quali sono quelli per cui questa distanza comune è massima.

   (Punti 4+3+3)

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice, scritta rispetto a due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ date, è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A e una base del suo nucleo.

   (b) Dire se è possibile che esista un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ che abbia la stessa immagine di f e il cui nucleo contenga il vettore di coordinate ${}^t(1, 2, 0, 1)$ (scritte nella base standard di $\mathbb{R}^4$).

   (Punti 3+3)

3. Siano $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ e $g : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ le applicazioni lineari le cui matrici, rispetto alla base canonica, sono rispettivamente

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -6 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

   (a) Trovare autovalori e autovettori di f e g.

   (b) Dire se f e g sono diagonalizzabili.

   (c) Trovare basi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^3$ tali che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(f) = I$$

   Mostrare che questo non è possibile per g.

   (Punti 4+2+3)

4. Sia ϕ la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^4$ definita da $\phi(v, w) = {}^t v Q w$, dove

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Trovare una base di $\mathbb{R}^4$ che sia ortogonale per ϕ.

   (b) Calcolare rango e segnatura di ϕ.

   (c) Sia A una matrice reale quadrata. Mostrare che ${}^t AA$ è una matrice simmetrica che ha lo stesso rango di A.

   (Punti 3+2+2)

Soluzioni

1. (a) La sfera S deve avere raggio pari alla distanza tra C e P, cioè

$$\sqrt{(2-1)^2+(-1-1)^2+(2-0)^2}=\sqrt{9}=3.$$

Perciò l'equazione cartesiana di S si può scrivere come

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9.$$

La giacitura della retta r sarà generata dal vettore normale al piano π, che ricaviamo dalla sua equazione ed è quindi ${}^t(1,-1,-2)$. Quindi la retta r è costituita dai punti $(-2+t,1-t,3-2t)$ ed avrà ad esempio le equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+z=-1 \end{cases}.$$

La giacitura del piano π è costituita dai vettori ortogonali al vettore ${}^t(1,-1,-2)$; essa è quindi generata ad esempio dai vettori ${}^t(1,1,0)$ e ${}^t(2,0,1)$ (che sono in effetti indipendenti tra loro).

(b) La distanza tra il piano π e il centro della sfera si può calcolare tramite la nota formula che in questo caso diventa

$$\frac{|2+1-4+1|}{\sqrt{1+4+4}}=0;$$

perciò il piano passa per il punto C e in particolare è secante rispetto alla sfera.

Sostituendo l'equazione parametrica della retta r ricavata in precedenza si ottiene l'equazione $6t^2-16t+12=0$ che non ha soluzioni reali; perciò la retta è esterna rispetto alla sfera.

(c) Ogni piano che interseca sia S sia r ha distanza 0 da entrambe, quindi esistono infiniti piani equidistanti da esse. Tra di essi però ci sono anche i piani paralleli ai due piani tangenti a S contenenti r (che esistono poichè r è esterna a S) che non intersecano S; tra questi ce ne sono a distanza arbitrariamente grande, quindi non esistono piani di distanza comune massima da S e r.

2. (a) La matrice A ha rango 2, come si può verificare immediatamente tramite l'eliminazione di Gauss, che la porta alla forma a scaletta

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in cui sono presenti due righe non nulle.

Il nucleo di A è allora di dimensione $3-2=1$ ed è generato ad esempio dal vettore (non nullo) ${}^t(3,1,-2)$; perciò una base del nucleo è costituita già da tale vettore.

(b) Poiché l'immagine di f ha dimensione 2 ed è generata ad esempio dalle sue prime due colonne, per definire g (che avrà nucleo di dimensione 2) basta sincerarsi che abbia la stessa immagine di f e che il vettore assegnato appartenga a tale nucleo.

Ad esempio, scegliendo la base standard in partenza e la base $\mathcal{C}$ in arrivo, l'applicazione g che ha associata la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

soddisfa le condizioni richieste: abbiamo già visto che la terza colonna è generata dalle prime due, e la quarta è stata costruita come l'opposto della somma della prima e del doppio della seconda: in questo modo essa è ancora linearmente dipendente dalle prime due, e quindi l'immagine di g è la stessa di f, e il vettore di coordinate ${}^t(1,2,0,1)$ nella base standard appartiene al suo nucleo per costruzione.

3. (a) Il polinomio caratteristico di f è $\det(tI - A) = t^3 - 3t - 2 = (t-2)(t+1)^2$. Quindi gli autovalori sono 2 con molteplicità 1 e -1 con molteplicità 2. Un autovettore per l'autovalore 2 è

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le componenti degli autovettori relativi all'autovalore -1 sono le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} 2x - 2y - 2z &= 0 \\ -x &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

Quindi gli autovettori in questione sono tutti proporzionali a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di g è $\det(tI - B) = t^3 - 3t^2 + 2t = (t-2)(t-1)t$. Quindi gli autovalori sono $0, 1, 2$, tutti con molteplicità 1. Autovettori per gli autovalori $0, 1, 2$ sono, rispettivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(b) f non è diagonalizzabile perché l'autovalore -1 ha molteplicità 2 ma l'autospazio corrispndente ha dimensione 1; g è diagonalizzabile perché tutti i suoi autovalori hanno molteplicità 1.

(c) Sia $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ una qualsiasi base di $\mathbb{C}^3$. Poniamo $w_i = f(v_i)$. Dato che f è invertibile, $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$ è una base di $\mathbb{C}^3$. Per la definizione di matrice associata a un omomorfismo, $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f) = I$. Dato che g non è invertibile, la sua matrice, rispetto a due qualsiasi basi, non può avere determinante non nullo; in particolare non può essere I.

4. (a) Poniamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e notiamo che $\phi(v_1, v_1) = 1$. I vettori

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

ortogonali a v_1 rispetto alla forma ϕ sono quelli per cui

$$x - y + w = 0 \tag{1}$$

Tra questi scegliamo ad esempio

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e notiamo che $\phi(v_2, v_2) = 2$. La condizioni di ortogonalità a v_2 è

$$y - 2z + w = 0 \tag{2}$$

Un vettore che soddisfa simultaneamente (1) e (2) è

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per il quale vale $\phi(v_3, v_3) = -3$. La condizioni di ortogonalità a v_3 è

$$y + z - w = 0 \tag{3}$$

Un vettore che soddisfa simultaneamente le condizioni di ortogonalità (1), (2) e (3) è

$$v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

per il quale vale $\phi(v_4, v_4) = -6$. I vettori v_1, v_2, v_3, v_4 costituiscono una base ortogonale rispetto a ϕ.

(b) Dato che $\phi(v, v) > 0$ per due dei vettori della base ortogonale trovata e $\phi(v, v) < 0$ per i rimanenti due, la forma ϕ ha rango 4 e segnatura $(2, 2)$.

(c) ${}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA$. Per vedere che A e ${}^tAA$ hanno lo stesso ranga basta mostrare che hanno lo stesso nucleo. Se $Ax = 0$ chiaramente ${}^tAAx = 0$. Viceversa, se ${}^tAAx = 0$, allora $0 = {}^tx{}^tAAx = {}^t(Ax)Ax = \|Ax\|^2$, dove $\|\ \|$ è la norma euclidea. Ne segue che $Ax = 0$.