Corso di Algebra 2 – a.a. 2011-2012

Prova scritta del 25.1.2013

1. Sia G un gruppo di ordine $3^2 11^2$.
   (a) Dire quanti possono essere i sottogruppi di Sylow di G.
   (b) Mostrare che, se esiste un elemento di G di ordine 121, G è abeliano.
   (c) Mostrare che esistono gruppi non abeliani di ordine $3^2 11^2$.

2. Sia $K = \mathbb{Q}[\zeta]$, dove ζ è una radice terza primitiva dell'unità.
   (a) Mostrare che $i\sqrt{3}$ appartiene a K.
   (b) Mostrare che $X^3 - i\sqrt{3}$ è irriducibile su K. (Suggerimento: ricordare che $\mathbb{Z}[\zeta]$ è un dominio euclideo)
   (c) Trovare il gruppo di Galois di $X^3 - i\sqrt{3}$ su K.

3. Determinare il grado del campo di spezzamento sul campo F e il gruppo di Galois sul campo F del polinomio $X^3 - 2$ nei seguenti casi:
   (a) $F = \mathbb{Z}/(5)$.
   (b) $F = \mathbb{Z}/(7)$.

Soluzioni

1. (a) Il numero degli 11-Sylow divide 9 ed è congruo a 1 modulo 11, quindi vale 1. Il numero dei 3-Sylow divide 121 ed è congruo a 1 modulo 3. I divisori di 121 sono 1, 11 e 121; il numero 11 non è congruo a 1 modulo 3, ma 121 sì. Quindi o c'è un solo 3-Sylow o ce ne sono 121.

   Se indichiamo con H l'unico 11-Sylow e con K un 3-Sylow, G è prodotto semidiretto $H \rtimes_\varphi K$, dove $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ è un omomorfismo. Notiamo anche che H e K sono gruppi di ordine p^2, e quindi abeliani.

   (b) Se G contiene un elemento di ordine 121, questo elemento genera un 11-Sylow, che coincide quindi con H. Il gruppo $\mathrm{Aut}(H)$ si identifica con il gruppo $(\mathbb{Z}/121\mathbb{Z})^*$, che ha ordine $11 \cdot 10$. Questo ordine è primo con $9 = \#(K)$, e quindi non esistono omomorfismi non banali da K a $\mathrm{Aut}(H)$.

   (c) Sia $H = (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^2$ e K un gruppo di ordine 9. Notiamo che esiste sempre un omomorfismo suriettivo $K \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Basta quindi mostrare che $\mathrm{Aut}(H)$ contiene un sottogruppo di ordine 3, cioè che contiene un elemento di ordine 3. Il gruppo $\mathrm{Aut}(H)$ si identifica con il gruppo delle matrici 2×2 a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Un elemento di ordine 3 di questo gruppo è ad esempio la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Ricordiamo che $1 + \zeta + \zeta^2 = 0$. Quindi $(\zeta - \zeta^2)^2 = \zeta^2 + \zeta^4 - 2\zeta^3 = \zeta^2 + \zeta - 2 = -3$. Dunque $\zeta - \zeta^2 = \pm i\sqrt{3}$.

(b) Bisogna mostrare che $X^3 - i\sqrt{3}$ non ha radici in $\mathbb{Q}[\zeta]$. Il campo $\mathbb{Q}[\zeta]$ è il campo delle frazioni di $\mathbb{Z}[\zeta]$. Dato che questo anello è euclideo, quindi a fattorizzazione unica, se $X^3 - i\sqrt{3}$ avesse una radice ϑ in $\mathbb{Q}[\zeta]$, questa apparterrebbe a $\mathbb{Z}[\zeta]$. D'altra parte $|\vartheta|^3 = \sqrt{3}$, cioè $|\vartheta| = \sqrt[6]{3}$. Mostreremo che non esistono elementi di $\mathbb{Z}[\zeta]$ di modulo $\sqrt[6]{3}$. Gli elementi di $\mathbb{Z}[\zeta]$ sono le combinazioni lineari a coefficienti interi di 1 e ζ. Se $z = a + b\zeta$ è uno di questi elementi, $|z|^2 = a^2 + b^2 + ab(\zeta + \zeta^2) = a^2 + b^2 - ab$ è un intero. Non può quindi essere uguale a $\sqrt[3]{3}$.

(c) Dato che K contiene le radici terze dell'unità, il teorema di struttura delle estensioni cicliche dice che il gruppo di Galois in questione è il gruppo ciclico con tre elementi, o più esattamente il gruppo delle radici terze dell'unità che agisce su ζ per moltiplicazione.

3. L'elevamento alla terza potenza $\alpha : F^* \to F^*$ è un omomorfismo di gruppi.

   (a) Il gruppo F^* ha ordine 4, quindi α è iniettivo, e dunque biunivoco. Ne segue che esiste un unico $a \in F^*$ tale che $a^3 = 2$; in effetti $3^3 = 27 \equiv 2 \mod 5$. Di conseguenza $X^3 - 2 = (X - 3)(X^2 + 3X - 1)$ in $F[X]$, e $X^2 + 3X - 1$ è irriducibile. Il campo di spezzamento di $X^3 - 2$ coincide con quello di $X^2 + 3X - 1$, che ha grado 2 su F. Il gruppo di Galois è $\mathbb{Z}/(2)$.

   (b) Il gruppo F^* è ciclico di ordine 6, quindi contiene esattamente tre elementi il cui cubo è 1. In altre parole, F contiene tutte le radici terze dell'unità. Inoltre, se $a^3 = 1$, allora $(-a)^3 = -1$. Quindi ogni elemento non nullo di F ha cubo uguale a 1 o a -1. Di conseguenza $X^3 - 2$ è irriducibile perché non ha radici in F. Dato che F contiene le radici terze dell'unità, il teorema di struttura delle estensioni cicliche dice che il gruppo di Galois di $X^3 - 2$ su F è $\mathbb{Z}/(3)$.