Corso di Algebra 2 - a.a. 2010-2011

Prova scritta del 27.9.2011

1. (a) Sia G un gruppo di ordine 148. Mostrare che G non è semplice.
   (b) Mostrare che esistono almeno 3 gruppi non abeliani di ordine 148 a due a due non isomorfi.

2. Dare la definizione di estensione algebrica e trascendente di campi. Dare esempi di entrambe. Dimostrare che un'estensione di grado finito è algebrica. Dire se vale il viceversa.

3. Calcolare il gruppo di Galois delle seguenti estensioni di campo:

   (a) $\mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{5}\big) : \mathbb{Q}$;
   (b) $\mathbb{Q}\big(i, \sin\big(\frac{2\pi}{3}\big)\big) : \mathbb{Q}$, dove $i^2 = -1$.
   (c) $\mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{5}, i, \sin\big(\frac{2\pi}{3}\big)\big) : \mathbb{Q}$.

Soluzioni

1. (a) La decomposizione di 148 in fattori primi è $148 = 2^2 \cdot 37$. Il numero dei 37-Sylow di G divide 4 ed è congruo a 1 modulo 37. Quindi G ha un unico 37-Sylow, che è normale.
   (b) Per il punto precedente, i gruppi di ordine 148 sono tutti isomorfi a gruppi della forma $G = H \rtimes_\varphi K$, dove K è un gruppo di ordine 4, H è un gruppo di ordine 37, e $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ è un omomorfismo. Dato che H e K sono abeliani, un tale gruppo è abeliano se e solo se φ è banale. Il gruppo $\mathrm{Aut}(H)$ è ciclico di ordine 36, e quindi contiene un elemento γ di ordine 4. Consideriamo le seguenti scelte di K e φ:
      i. K è ciclico di ordine 4 e φ è l'omomorfismo che manda un generatore di K in γ.
      ii. K è ciclico di ordine 4 e φ è l'omomorfismo che manda un generatore di K in γ^2.
      iii. K è prodotto di due gruppi ciclici di ordine 2 e φ è l'omomorfismo che manda uno dei suoi due generatori in γ^2 e l'altro nell'elemento neutro.

   Nei primi due esempi i 2-Sylow sono ciclici di ordine 4 mentre nel terzo sono prodotto di due gruppi di ordine 2. Quindi la terza scelta dà luogo a un gruppo non isomorfo a quelli risultanti dalle prime due scelte. Per mostrare che anche le prime due scelte producono gruppi tra loro non isomorfi si può osservare che, indicando con α un generatore di H e con β uno di K, nel primo caso il centralizzatore di α si riduce a H, mentre nel secondo è il sottogruppo di indice 2 in G generato da α e β^2 (che commutano per costruzione).

   Una ulteriore domanda: perchè non c'è un analogo di i. con K prodotto di due gruppi ciclici di ordine 2?

3. (a) Il gruppo di Galois è banale, perchè ogni suo elemento deve mandare $\sqrt[3]{5}$ in una radice cubica di 5, e $\sqrt[3]{5}$ è la sola tra queste radici ad appartenere a $\mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{5}\big) \subset \mathbb{R}$.

(b) i è una radice quarta primitiva dell'unità e $\eta = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \in \mathbb{Q}\big(i, \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\big)$ è una radice terza primitiva dell'unità, quindi $\mathbb{Q}\big(i, \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\big)$ è il campo ciclotomico $\mathbb{Q}(\zeta)$, dove ζ è una radice dodicesima primitiva dell'unità; ad esempio si può scegliere $\zeta = i\eta$. In particolare, $\mathbb{Q}\big(i, \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\big)$ è una estensione di Galois dei razionali. Inoltre il gruppo di Galois di $\mathbb{Q}\big(i, \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\big)$ su $\mathbb{Q}$, che indicheremo con H, si identifica al gruppo moltiplicativo di $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ (il prodotto di due gruppi ciclici di ordine 2) che agisce su ζ per elevamento a potenza.

(c) Dato che $\mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{5}, i, \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\big)$ contiene tutte le radici terze dell'unità, è una estensione di Galois di $\mathbb{Q}\big(i, \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\big)$, e quindi di $\mathbb{Q}$. Il gruppo di Galois di $\mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{5}, i, \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\big)$ su $\mathbb{Q}\big(i, \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\big)$, che indicheremo con G, si identifica al gruppo delle radici terze dell'unità, agenti su $\sqrt[3]{5}$ per moltiplicazione. Ne segue che il gruppo di Galois di $\mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{5}, i, \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\big)$ su $\mathbb{Q}$ è il prodotto semidiretto $G \rtimes_\varphi H$, dove $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(G)$ è un omomorfismo. Si vede facilmente con un calcolo diretto che, se $H = \{1, h_1, h_2, h_3\}$, $\varphi(h_i)$ agisce su G mandando un generatore g in $g^2 = g^{-1}$ per due degli i e banalmente per il rimanente.