Corso di Algebra 2 - a.a. 2010-2011

Prova scritta del 21.6.2011

1. (a) Mostrare che ogni gruppo di ordine $1225 = 5^2 7^2$ è abeliano.

   (b) Mostrare che, a meno di isomorfismo, ci sono esattamente 4 gruppi di ordine 1225 e descriverli.

2. Dare la definizione di estensione galoisiana di campi.

3. Sia L una estensione di grado 4 del campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Indichiamo con $G(L, \mathbb{Q})$ il gruppo di Galois di L su $\mathbb{Q}$. Si considerino le seguenti proprietà:

   (a) $L : \mathbb{Q}$ non è normale;

   (b) $G(L, \mathbb{Q}) = \mathbb{Z}_4$;

   (c) $G(L, \mathbb{Q}) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$,

   Dare un esempio in cui vale (a), uno in cui vale (b) e uno in cui vale (c).

Soluzioni

1. Sia G un gruppo di ordine 1225.

   (a) Il numero dei 5-Sylow di G è congruo a 1 modulo 5 e divide $7^2 = 49$. Dato che 5 non divide 6 e 48 vi è un unico 5-Sylow H, che è quindi normale. Analogamente, il numero dei 7-Sylow di G è congruo a 1 modulo 7 e divide $5^2 = 25$. Dato che 7 non divide 4 e 24 vi è un unico 7-Sylow K, anch'esso normale. Quindi G è prodotto diretto di H e K. D'altra parte H e K sono gruppi di ordine p^2 e quindi abeliani. Ne segue che G è abeliano.

   (b) Per il teorema di struttura per i gruppi abeliani finiti G è prodotto diretto di gruppi ciclici il cui ordine è una potenza di un primo. Gli ordini possibili sono:

      i. $5, 5, 7, 7$; in questo caso G è prodotto diretto di due gruppi ciclici di ordine 35.
      ii. $5, 5, 7^2$; in questo caso G è prodotto diretto di due gruppi ciclici di ordini 5 e $5 \cdot 7^2$.
      iii. $5^2, 7, 7$; in questo caso G è prodotto diretto di due gruppi ciclici di ordini 7 e $5^2 \cdot 7$.
      iv. $5^2, 7^2$; in questo caso G è ciclico.

3. (a) $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ non è normale su $\mathbb{Q}$ (le radici immaginarie di di $x^4 = 2$ non sono in L);

   (b) $L = \mathbb{Q}(\omega)$ dove ω è una radice quinta primitiva dell'unità; $G(L, \mathbb{Q}) = \mathbb{Z}_4$;

   (c) $L = Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$; $G(L, \mathbb{Q}) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.