Corso di Algebra 2 - a.a. 2010-2011

Prova scritta del 7.7.2011

1. (a) Sia G un gruppo di ordine 75. Mostrare che, se il 5-sottogruppo di Sylow di G è ciclico, allora G è ciclico.

   (b) Mostrare che esiste almeno un gruppo non abeliano di ordine 75.
   Suggerimento per (b): notare che, se K è un campo, esiste una matrice A 2×2 a coefficienti in K tale che $A \neq I$, $A^3 = I$, ad esempio $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Enunciare la corrispondenza di Galois tra i sottocampi di un'estensione galoisiana finita di campi e i sottogruppi del gruppo di Galois. Descrivere con un esempio significativo tale corrispondenza.

3. Sia $\omega = \cos(\frac{2\pi}{19}) + i\sin(\frac{2\pi}{19})$. Calcolare il grado delle seguenti estensioni di campo:

   (a) $\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}$

   (b) $\mathbb{Q}\big(\cos(\frac{2\pi}{19})\big) : \mathbb{Q}$

   (c) $\mathbb{Q}\big(\sin(\frac{2\pi}{19}), \cos(\frac{2\pi}{19})\big) : \mathbb{Q}$

   (d) $\mathbb{Q}\big(\cos(\frac{8\pi}{19}), \cos(\frac{2\pi}{19})\big) : \mathbb{Q}$

Soluzioni

1. Se G ha ordine 75 il numero dei suoi 5-sottogruppi di Sylow è congruo a 1 modulo 5 e divide 3. Quindi c'è un unico 5-sottogruppo di Sylow H, che è normale. Sia K un 3-sottogruppo di Sylow. Il gruppo G è prodotto semidiretto

$$G = H \rtimes_\varphi K$$

   dove $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ è un omomorfismo di gruppi, ed è abeliano se e solo se φ è l'omomorfismo banale.

   (a) Se H è ciclico il suo gruppo di automorfismi è il gruppo moltiplicativo di $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$, che consiste delle classi di resto degli interi positivi, minori di 25 e primi con 5. Dunque il gruppo degli automorfismi di H ha ordine 20. Dato che 20 è primo con 3 il solo omomorfismo da K a $\mathrm{Aut}(H)$ è quello banale.

   (b) Sia K un gruppo ciclico di ordine 3 e sia H il prodotto di due gruppi ciclici di ordine 5. Il gruppo degli automorfismi di H si identifica al gruppo delle matrici invertibili 2×2 a coefficienti in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, e quindi contiene almeno un elemento γ non banale di ordine 3. Indichiamo con $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ l'omomorfismo che manda un generatore di K in γ. Il gruppo $H \rtimes_\varphi K$ ha ordine 75 e non è abeliano.

3. (a) ω è una radice 19-esima primitiva di 1, e dunque è una radice del polinomio ciclotomico $\Phi_{19} = X^{18} + X^{17} + \cdots + X + 1$, che è irriducibile. Quindi $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = 18$.

(b) Il coniugio è un automorfismo di $\mathbb{Q}(\omega)$. Quindi $\cos(\frac{2\pi}{19}) = \frac{\omega+\overline{\omega}}{2} \in \mathbb{Q}(\omega)$. Inoltre $\mathbb{Q}\big(\cos(\frac{2\pi}{19})\big) \subset \mathbb{R}$ e dunque è diverso da $\mathbb{Q}(\omega)$, mentre ω è radice di $X^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{19})X + 1$. Quindi $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}\big(\cos(\frac{2\pi}{19})\big)] = 2$, e dunque $[\mathbb{Q}\big(\cos(\frac{2\pi}{19})\big) : \mathbb{Q}] = 9$.

(c) $\sin(\frac{2\pi}{19})$ è radice di $X^2 + \cos^2(\frac{2\pi}{19}) - 1$ ma non appartiene a $\mathbb{Q}\big(\cos(\frac{2\pi}{19})\big)$. Infatti, se così fosse, $i = (\omega - \cos(\frac{2\pi}{19}))/\sin(\frac{2\pi}{19})$ apparterrebbe a $\mathbb{Q}(\omega)$, che quindi conterrebbe una radice primitiva 76-esima di 1, cioè $i\omega$, e perciò avrebbe grado $\varphi(76) = 36$ su $\mathbb{Q}$, contro quanto mostrato in (a). Quindi il grado $[\mathbb{Q}\big(\sin(\frac{2\pi}{19}), \cos(\frac{2\pi}{19})\big) : \mathbb{Q}\big(\cos(\frac{2\pi}{19})\big)]$ vale 2. Ne segue che $[\mathbb{Q}\big(\sin(\frac{2\pi}{19}), \cos(\frac{2\pi}{19})\big) : \mathbb{Q}] = 18$.

(d) Segue dalle formule di addizione per seni e coseni che $\cos(4\vartheta) = 8\cos^4\vartheta - 8\cos^2\vartheta + 1 \in \mathbb{Q}(\cos\vartheta)$ per ogni ϑ. Ne segue che $\mathbb{Q}\big(\cos(\frac{8\pi}{19}), \cos(\frac{2\pi}{19})\big) = \mathbb{Q}\big(\cos(\frac{2\pi}{19})\big)$, e quindi che $[\mathbb{Q}\big(\cos(\frac{8\pi}{19}), \cos(\frac{2\pi}{19})\big) : \mathbb{Q}] = 9$.