Corso di Algebra 1 – a.a. 2011-2012

Prova scritta del 26.9.2012

1. Indichiamo con C_n il gruppo ciclico di ordine n.
   (a) Mostrare che $C_{15} \times C_6$ non è ciclico.
   (b) Mostrare che $C_{15} \times C_6$ non è isomorfo a $C_5 \times C_{18}$.

2. Sia n un intero positivo e H un sottogruppo di S_n. Dimostrare che, se H ha ordine dispari, allora H è contenuto in A_n.

3. Sia A un anello commutativo che non sia un dominio di integrità. Dimostrare che ogni ideale non nullo di A contiene dei divisori di zero.

4. Sia ζ una radice dodicesima primitiva dell'unità e sia ω una radice terza primitiva dell'unità.
   (a) Mostrare che $\mathbb{Q}[\omega, \sqrt{-1}] = \mathbb{Q}[\zeta]$.
   (b) Calcolare il grado $\big[\mathbb{Q}[\zeta] : \mathbb{Q}\big]$.

Soluzioni

1. (a) Sia (a, b) un elemento di $C_{15} \times C_6$. Dato che 30 è multiplo sia di 15 che di 6, $(a, b)^{30} = (a^{30}, b^{30}) = (1, 1)$. Dunque $C_{15} \times C_6$ non contiene elementi di ordine $90 = \#(C_{15} \times C_6)$ e quindi non è ciclico.
   (b) Sia g un generatore di C_{18}. L'ordine di g è 18, che non divide 30. Quindi $g^{30} \neq 1$. Ma allora $(1, g)^{30} \neq (1, 1)$. Per contro, come si è visto al punto precedente, $\alpha^{30} = (1, 1)$ per ogni elemento $\alpha \in C_{15} \times C_6$.

2. Sia σ un elemento di H. L'ordine di σ divide l'ordine di H ed è quindi dispari; indichiamolo con k. Se indichiamo con $\varepsilon(\sigma)$ il segno di σ, allora $1 = \varepsilon(1) = \varepsilon(\sigma^k) = \varepsilon(\sigma)^k$. Poiché k è dispari e $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ ne segue che $\varepsilon(\sigma) = 1$, cioè che $\sigma \in A_n$.

3. Sia I un ideale non nullo di A e sia a un suo elemento non nullo. Sia b un divisore di zero in A; ciò significa che $b \neq 0$ e che esiste $c \neq 0$ tale che $bc = 0$. Se $ab = 0$, a è un divisore di zero. Se $ab \neq 0$, ab è un divisore di zero poiché $abc = 0$. D'altra parte $ab \in I$ dato che $a \in I$ e I è un ideale.

4. (a) ζ^4 è una radice terza primitiva di 1, quindi uguale a ω o a ω^2. Analogamente ζ^3 è una radice quarta primitiva di 1, quindi uguale a $\pm\sqrt{-1}$. Ne segue che $\mathbb{Q}[\omega, \sqrt{-1}] \subset \mathbb{Q}[\zeta]$ (si noti che $\omega = (\omega^2)^2$). Viceversa, dico che $\alpha = \omega\sqrt{-1}$ è una radice dodicesima primitiva di 1. Se così non fosse, infatti, dovrebbe essere $\alpha^4 = 1$ oppure $\alpha^6 = 1$. Però $\alpha^4 = \omega^4 = \omega \neq 1$ e $\alpha^6 = \sqrt{-1}^6 = \sqrt{-1}^2 = -1 \neq 1$. Se ne conclude che $\mathbb{Q}[\zeta] \subset \mathbb{Q}[\omega, \sqrt{-1}]$.
   (b) $\big[\mathbb{Q}[\zeta] : \mathbb{Q}\big] = \big[\mathbb{Q}[\omega, \sqrt{-1}] : \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]\big] \cdot \big[\mathbb{Q}[\sqrt{-1}] : \mathbb{Q}\big] = 2\big[\mathbb{Q}[\omega, \sqrt{-1}] : \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]\big]$. Dato che $\big[\mathbb{Q}[\omega] : \mathbb{Q}\big] = 2$, il grado $\big[\mathbb{Q}[\omega, \sqrt{-1}] : \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]\big]$ può a priori valere 1, se $\omega \in \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$, o 2 se $\omega \notin \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$. Mostriamo che è vera la seconda di queste due alternative. Ricordiamo che $\omega = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}$. Quindi se ω appartenesse a $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ ne seguirebbe che $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$, quindi che $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, il che non è. In conclusione $\big[\mathbb{Q}[\zeta] : \mathbb{Q}\big] = 4$.