**Corso di Algebra 1 – a.a. 2011-2012**

*Prova scritta del 23.2.2012*

1. Sia $G$ un gruppo. Poniamo $\Delta = \{(g, g) : g \in G\}$.
   (a) Mostrare che $\Delta$ è un sottogruppo di $G \times G$.
   (b) Mostrare che $\Delta$ è un sottogruppo normale di $G \times G$ se e solo se $G$ è abeliano.

2. Dimostrare che i gruppi $D_4 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ e $D_3 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ non sono isomorfi.

3. Sia $A$ un anello commutativo e $f : A \to \mathbb{Q}$ un omomorfismo di anelli.
   (a) Dimostrare che $\mathbb{Z}$ è contenuto nell'immagine di $f$.
   (b) Dimostrare che il nucleo di $f$ è un ideale primo, e che è massimale se e solo se $f$ è suriettivo.

4. Sia $K$ un campo e sia $L$ un campo di spezzamento del polinomio $P(X) = X^3 + X^2 + 2$ su $K$. Calcolare il grado $[L : K]$ nei seguenti casi:
   (a) $K = \mathbb{Z}/(7)$
   (b) $K = \mathbb{Q}$ (suggerimento: osservare che in questo caso $P(X)$ ha una sola radice reale)

*Soluzioni*

1. (a) $\Delta$ non è vuoto perché contiene $(1, 1)$. $\Delta$ è chiuso rispetto al prodotto perché $(g, g)(h, h) = (gh, gh) \in \Delta$. Infine $\Delta$ è chiuso rispetto all'operazione di inversa perché $(g, g)^{-1} = (g^{-1}, g^{-1}) \in \Delta$.
   (b) Se $\Delta$ è normale $(h, k)(g, g)(h, k)^{-1} \in \Delta$ per ogni scelta di $g, h, k \in G$. In particolare, per $h = 1$, se ne deduce che $(g, kgk^{-1}) \in \Delta$, cioè che $g = kgk^{-1}$, per ogni scelta di $g, k \in G$. In altre parole, $G$ è abeliano. Viceversa, se $G$ è abeliano, $(h, k)(g, g)(h, k)^{-1} = (hgh^{-1}, kgk^{-1} = (g, g)$ per ogni scelta di $g, h, k \in G$ e quindi $\Delta$ è normale.

2. Gli elementi di ordine 6 di $D_3 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sono quelli della forma $(g, h)$, dove $g$ ha ordine 3 e $h$ ha ordine 2. Le possibilità per $g$ sono due e quelle per $h$ una sola. Dunque $D_3 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ contiene esattamente due elementi di ordine 6. Invece gli elementi di ordine 6 di $D_4 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sono quelli della forma $(g, h)$, dove $g$ ha ordine 2 e $h$ ha ordine 3. Le possibilità per $g$ sono 5 e quelle per $h$ due. Dunque $D_4 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ contiene 10 elementi di ordine 6, e non è quindi isomorfo a $D_3 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

3. (a) $f(1) = 1$, quindi $f(n \cdot 1) = n \cdot f(1) = n$. Dunque $f(A) \supset \mathbb{Z}$.
   (b) Per i teoremi di isomorfismo $f(A)$ è isomorfo a $A/\ker(f)$. Inoltre $f(A)$ è un sottoanello di $\mathbb{Q}$, e quindi è un dominio. Ne segue che $\ker(f)$ è primo. Se $f$ è suriettiva $A/\ker(f) \simeq \mathbb{Q}$ è un campo e quindi $\ker(f)$ è massimale. Viceversa se $\ker(f)$ è massimale $f(A) \simeq A/\ker(f)$ è un sottocampo di $\mathbb{Q}$. Dato che $\mathbb{Z} \subset f(A)$, quest'ultimo contiene tutte le frazioni $m/n$, dove $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, cioè contiene $\mathbb{Q}$.

4. (a) Il numero 2 è una radice di $P$ modulo 7, e la regola di Ruffini dà $P(X) = (X-2)(X^2 + 4X - 1)$ in $K[X]$. Dunque $L$ è un campo di spezzamento di $X^2 + 4X - 1$. Dato che questo polinomio non ha radici in $K$ e ha grado 2, è irriducibile. Se $\alpha$ è una sua radice, $X^2 + 4X - 1$ si fattorizza completamente in $K[\alpha]$, ed è il polinomio minimo di $\alpha$ su $K$. Dunque $L = K[\alpha]$ e $[L : K] = \deg(X^2 + 4X - 1) = 2$.

(b) Le radici razionali di $P$, se esistono, sono intere e dividono 2. Però $\pm 1$ e $\pm 2$ non sono radici di $P$, che è quindi irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$. La derivata di $P(X)$ vale $3X^2 + 2X = X(3X + 2)$. Ne segue che $P(X)$, visto come funzione reale di variabile reale, ha un massimo relativo per $X = -2/3$ e un minimo relativo per $X = 0$. Dato che $P(0) = 2 > 0$, il polinomio $P(X)$ ha una sola radice reale $\alpha$, il cui polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ è $P$. D'altra parte $P(0) \neq 0 \neq P(-2/3)$, e perciò $P$ ha tre radici distinte, $\alpha$ appunto e altre due radici complesse coniugate $\beta$ e $\overline{\beta}$. Dunque $L = \mathbb{Q}[\alpha, \beta, \overline{\beta}] = \mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ e

$$[L : K] = \big[\mathbb{Q}[\alpha, \beta] : \mathbb{Q}[\alpha]\big] \big[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}\big] = 2 \cdot 3 = 6$$